

- Mécanique quantique 2 -

Systèmes quantiques élémentaires : qubit et spin $\frac{1}{2}$.

Un bit classique, binary digit ou nombre binaire, est un système permettant de faire une distinction élémentaire, et donc la quantité d'information la plus petite possible :

0 ou 1, l'un ou l'autre...

En mécanique quantique, un système à deux états distincts ne peut pas exister, puisque toutes leurs combinaisons linéaires sont aussi des états possibles du système.

Quant à un système à un seul état, par définition il ne peut pas évoluer.

Le système quantique élémentaire, appelé qubit pour quantum binary digit, est celui dont l'espace des états est de dimension 2. Ce système contient deux états à valeurs bien définies de l'observable physique, puis tous les autres états dont la valeur n'est pas bien définie. Un photon et sa polarisation, un électron et son spin, par exemples.

On peut représenter un qubit sur la sphère de Bloch :

Imaginons un état d'un système à deux niveaux.

En toute généralité, on peut le décomposer sur les états propres de l'espace $|0\rangle$ et $|1\rangle$:

$$|\Phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \text{ avec } |a|^2 + |b|^2 = 1 \text{ et } (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

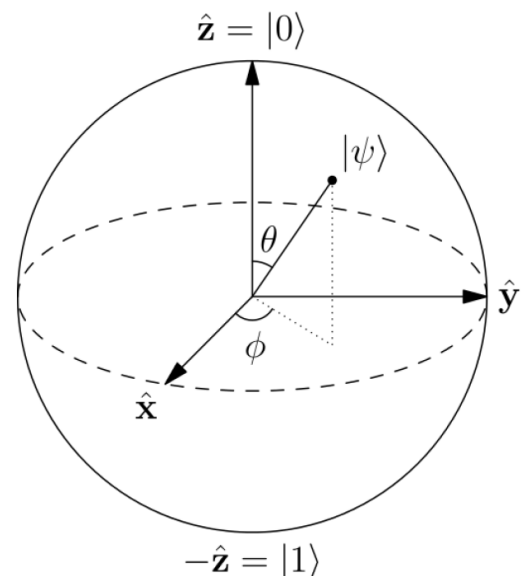
De plus, puisque les facteurs de phase n'affectent pas l'état physique du système (via la règle de Born), on peut supposer a réel positif et écrire :

$$|\Phi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \text{ (état pur)}$$

$$\text{avec } \theta \in [0; \pi] \text{ et } \phi \in [0; 2\pi].$$

A chaque état du qubit peut être associé un point M sur la sphère unité, de longitude ϕ et de colatitude θ .

On constate par exemple que l'état $|0\rangle$ correspond au vecteur \vec{u}_z , et l'état $|1\rangle$ au vecteur $-\vec{u}_z$.



Plus généralement, on peut montrer que deux points diamétralement opposés sur la sphère de Bloch définissent deux états orthogonaux de l'espace des états.

Une grandeur physique observable correspond à un opérateur hermitien du type :

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont deux réels, et } z = a + ib \text{ un complexe.}$$

L'espace des grandeurs observables est donc de dimension 4. En voici une base :

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

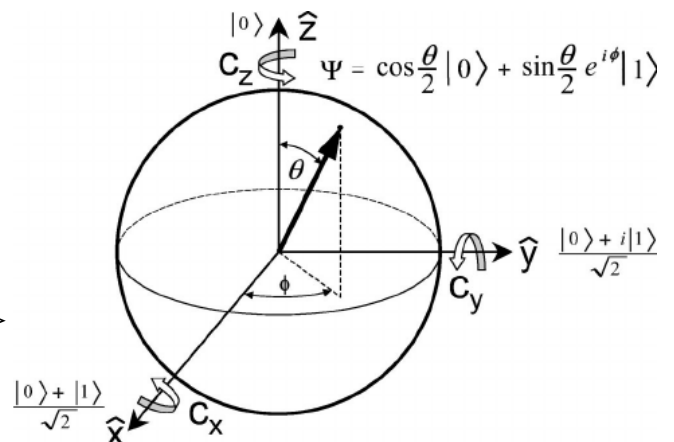
Ce sont les **matrices de Pauli**, dont on peut étudier certaines propriétés.

Par exemple, le commutateur $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$, et idem avec permutations circulaires.

Pour les **valeurs propres** des matrices σ_i : la trace est nulle, donc leur somme, et le déterminant vaut -1 , donc leur produit, et les valeurs propres sont donc -1 et 1 .

- L'opérateur σ_3 a pour valeur propre 1 associée au vecteur propre d'état $|0\rangle$, qui correspond au vecteur \vec{u}_z sur la sphère de Bloch. Et pour valeur propre -1 associée au vecteur propre d'état $|1\rangle$, qui correspond au vecteur $-\vec{u}_z$ sur la sphère.

- L'opérateur σ_1 a pour valeur propre 1 associée au vecteur propre d'état $1/\sqrt{2}|0\rangle + 1/\sqrt{2}|1\rangle$ qui correspond au vecteur \vec{u}_x sur la sphère de Bloch. Et pour valeur propre -1 associée au vecteur propre d'état $1/\sqrt{2}|0\rangle - 1/\sqrt{2}|1\rangle$ qui correspond au vecteur $-\vec{u}_x$.



- L'opérateur σ_2 a pour valeur propre 1 associée au vecteur propre d'état $1/\sqrt{2}|0\rangle + i/\sqrt{2}|1\rangle$ qui correspond au vecteur \vec{u}_y sur la sphère de Bloch. Et pour valeur propre -1 associée au vecteur propre d'état $1/\sqrt{2}|0\rangle - i/\sqrt{2}|1\rangle$ qui correspond au vecteur $-\vec{u}_y$.

Cette représentation abstraite sur la sphère de Bloch ne correspond pas à la réalité tridimensionnelle physique, sauf pour le spin $\frac{1}{2}$...

Expérience de Stern et Gerlach (1922) :

Le moment angulaire d'une particule est définie par $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ et caractérise d'une certaine manière la rotation de la particule autour d'un point fixe.

Le moment magnétique d'un objet plongé dans un champs magnétique externe uniforme \vec{B}_{ext} est le vecteur $\vec{\mu}$ défini par le moment de force qu'il subit : $\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_{ext}$.

Il caractérise l'intensité d'une source magnétique, comme un courant ou un aimant.

Une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité I produit un moment magnétique $\vec{\mu} = IS \vec{n} = \pi r^2 I \vec{n}$. Dans le cas d'un électron de charge q , nous avons :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{2\pi r} = \frac{qv}{2\pi r} \text{ et son moment magnétique est : } \vec{\mu} = \frac{qvr}{2} \vec{n}.$$

Comme on a $\vec{L} = m_e r v \vec{n}$, on peut écrire $\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$

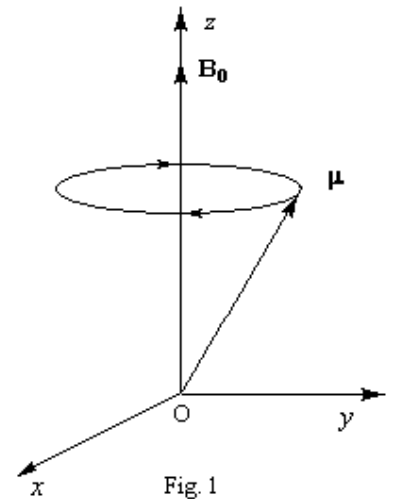
avec $\gamma = \frac{q}{2m_e}$ qui est le **rapport gyromagnétique**.

Le théorème du moment angulaire affirme que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\vec{r}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 = \gamma \vec{L} \wedge \vec{B}_0, \text{ ce qui donne aussi}$$

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B}_0 \wedge \vec{\mu}, \text{ soit } \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mu} \text{ avec } \vec{\omega} = -\gamma \vec{B}_0 = \frac{e}{2m} \vec{B}_0.$$

Cet équation de rotationnel montre que le moment magnétique $\vec{\mu}$ est de norme constante, et subit un mouvement de précession autour du vecteur $\vec{\omega}$ colinéaire au champs magnétique externe.



On peut alors facilement observer que $\langle \hat{\mu}_x \rangle = \langle \hat{\mu}_y \rangle = 0$ et $\mu_z = cste = \mu_{z_0}$.

De plus, μ_x et μ_y sont indépendants des coordonnées d'espace.

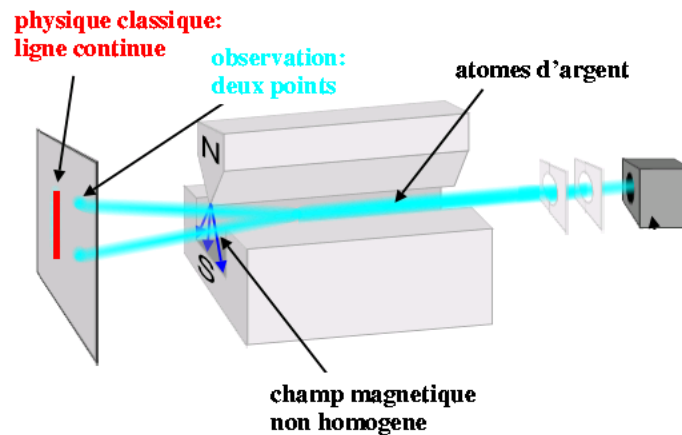
Dans le cas d'un champs \vec{B}_{ext} variable, un moment magnétique subit également une force $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ avec $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ et donc $\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\mu} \cdot \vec{B})$.

Dans l'expérience, il s'agit de dévier des atome d'argent à l'aide d'un champs magnétique non homogène. Pour cela, on crée un champs magnétique variable dans le plan vertical (\vec{u}_x, \vec{u}_z) .

En première approche, on peut considérer un champs vertical fixe B_0 avec une petite variation linéaire dans ce plan : $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z + a z \vec{u}_z + a x \vec{u}_x$.

On obtient alors une force subie $\vec{F} = \begin{pmatrix} a\mu_x \\ 0 \\ a\mu_z \end{pmatrix}$ dont la valeur moyenne sera $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\mu_z \end{pmatrix}$, et donc

le dispositif permettra d'observer la répartition verticale des atomes, qui dépend de μ_z , et donc **de mesurer la grandeur μ_z** .



Les atomes d'argent possèdent à priori un moment magnétique $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{u}$ aléatoire à la sortie du four. On s'attend donc à observer toutes les répartitions possibles sur la verticale, suivant leur valeur de μ_z à l'entrée dans le dispositif SG.

Mais l'expérience montre qu'on observe que deux points d'impacts, comme si la variable μ_z ne pouvait prendre que deux valeurs, μ_0 et $-\mu_0$, où $\mu_0 = \|\vec{\mu}\|$ est la valeur maximale possible de μ_z . On observe la même chose pour les grandeurs μ_x et μ_y par rotations de l'appareil SG.

Ainsi, l'espace des états associé à ces grandeurs possède deux états propres :

- $|+\rangle$ qui correspondant à la valeur positive μ_0 de la grandeur ;
- $|-\rangle$ qui correspondant à la valeur négative $-\mu_0$ de la grandeur.

Partant d'un état inconnu $|\Phi\rangle = \alpha |+\rangle_z + \beta |-\rangle_z$, après un passage dans l'appareil de mesure SG_z , on sélectionne un état propre $|\Phi\rangle = |+\rangle_z$ du système.

Puis par passage dans un appareil SG_x , on observe deux états propres possibles :

$|+\rangle_x$ et $|-\rangle_x$ avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, correspondants aux valeurs μ_0 et $-\mu_0$.

On sélectionne maintenant un état propre $|\Phi\rangle = |+\rangle_x$ par mesure.

Un nouveau passage dans SG_z , permet d'observer les états $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Finalement, $|\Phi\rangle = |+\rangle_x$ est encore une combinaison des états $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$.

Ainsi, l'espace des états est bien de dimension 2 sur \mathbb{C} , mais chaque couple de vecteurs $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$, $\{|+\rangle_y, |-\rangle_y\}$ et $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ en est une base.

De même que $\{|+\rangle_{\vec{u}}, |-\rangle_{\vec{u}}\}$ pour tout autre direction \vec{u} .

- Exprimons $|+\rangle_x$ dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ par exemple :

On écrit $|+\rangle_x = \alpha |+\rangle_z + \beta |-\rangle_z$ avec donc $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$.

On peut montrer qu'à un facteur de phase près, en modifiant convenablement la base, on obtient :

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_z.$$

On obtient alors $|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_z$ en choisissant $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}$, puis en utilisant la condition d'orthogonalité $\langle - | + \rangle_x = 0$, on obtient $e^{i\phi} = -1$.

Puis en posant $|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} |-\rangle_z$ on détermine la phase en utilisant le fait que la probabilité de mesurer l'état $|+\rangle_x$ dans cet état vaut encore $\frac{1}{2}$, ce qui s'écrit :

$$|\langle + | + \rangle_y|^2 = \frac{1}{2} \text{ et qui donne } |1 + e^{i\phi}| = \sqrt{2} \text{ et donc deux possibilités, suivant}$$

l'orientation de l'espace choisie avec le dernier axe ;

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{2}} |-\rangle_z \text{ et } |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z - \frac{i}{\sqrt{2}} |-\rangle_z \text{ (sens direct)}$$

$$\text{ou } |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z - \frac{i}{\sqrt{2}} |-\rangle_z \text{ et } |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{2}} |-\rangle_z \text{ (sens indirect).}$$

- Considérons maintenant un opérateur hermitien $\hat{G} = \text{Diag}(g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$ dans la base orthonormale $\{g_i\}_{i \in I}$, de valeurs propres $(g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$.

Alors on peut également définir cet opérateur par $\hat{G} = \sum_{i \in I} g_i |g_i\rangle \langle g_i|$.

Cette définition étant indépendante de la base choisie au départ.

Pour l'opérateur $\hat{\mu}_z$ on aura $\hat{\mu}_z = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \end{pmatrix} = \mu_0 \sigma_3$ dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$,
 et aussi $\hat{\mu}_z = \mu_0 |+\rangle_z \langle +| - \mu_0 |-\rangle_z \langle -| = \mu_0 \Pi_z^+ - \mu_0 \Pi_z^-$.

On a de même $\hat{\mu}_x = \mu_0 |+\rangle_x \langle +| - \mu_0 |-\rangle_x \langle -|$, qui peut s'exprimer dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ d'après ce qui précède :

Comme $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_z$ et $|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_z$, on obtient :

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 |+\rangle_z \langle -| + \mu_0 |-\rangle_z \langle +|, \text{ ce qui permet d'obtenir : } \hat{\mu}_x = \mu_0 \sigma_1.$$

On obtient également $\hat{\mu}_y = \mu_0 |-\rangle_z \langle +| - i \mu_0 |+\rangle_z \langle -|$, et donc $\hat{\mu}_y = \mu_0 \sigma_2$.

Cas général : Considérons maintenant l'opérateur $\Pi_{\vec{u}}$ correspondant à la mesure de la
 composante du moment magnétique suivant une direction unitaire $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans l'espace
 physique réel. On peut encore écrire $\vec{u} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ en coordonnées sphériques.

Par linéarité par rapport à \vec{u} , on a alors $\Pi_{\vec{u}}(\vec{\mu}) = x \hat{\mu}_x + y \hat{\mu}_y + z \hat{\mu}_z$, car la projection
 de $\vec{\mu}$ sur la direction \vec{u} est la combinaison linéaire des projections suivant les axes du
 repère. On obtient :

$$\Pi_{\vec{u}} = \mu_0 \left(\sin \theta \cos \phi \times \sigma_1 + \sin \theta \sin \phi \times \sigma_2 + \cos \theta \times \sigma_3 \right)$$

$$\text{et donc } \Pi_{\vec{u}} = \mu_0 \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Cet opérateur possède également μ_0 et $-\mu_0$ pour valeurs propres, associées aux
 vecteurs propres $|+\rangle_{\vec{u}} = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle_z + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle_z$
 et $|-\rangle_{\vec{u}} = \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle_z - e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle_z$.

On reconnaît ici le représentant général d'un vecteur sur la sphère de Bloch. L'opérateur $\Pi_{\vec{u}}$ correspond donc aux vecteurs d'états \vec{u} et $-\vec{u}$ sur la sphère de Bloch, de même direction que le vecteur physique \vec{u} .

Dans ce cas, il y a une correspondance directe entre la représentation abstraite sur la sphère de Bloch et la réalité physique concernant la direction \vec{u} .

En résumé, si l'on mesure la composante du moment magnétique suivant une direction \vec{u} de l'espace physique, on obtient de manière aléatoire les valeurs $-\mu_0$ et μ_0 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Lorsque le système est dans l'état $|+\rangle_{\vec{u}}$, le calcul de la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{\mu}_z$ donne : $\langle + | \hat{\mu}_z | + \rangle_{\vec{u}} = \dots = \mu_0 \cos\theta$, qui est la valeur moyenne observée classiquement.

A propos de spin $\frac{1}{2}$.

Comme nous l'avons déjà vu, un électron en mouvement circulaire est la source d'un moment angulaire, auquel est associé un moment magnétique par la relation $\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$, où

$$\gamma = \frac{e}{2m}$$

est le coefficient gyromagnétique.

Mais un électron est défini par la théorie comme une particule ponctuelle sans extension, il ne peut pas avoir de moment angulaire propre. On associe donc son moment magnétique à un moment angulaire qui ne correspond pas à des rotations physiques de la particule, mais plutôt un moment angulaire intrinsèque, appelé spin, qui caractérise son comportement vis à vis des rotations dans l'espace.

Le spin est un vecteur \vec{s} défini par : $\vec{L} = g \vec{S}$ où g est un nombre sans dimension appelé **facteur de Landé**. Et comme $\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$ on obtient alors $\vec{\mu} = g \gamma \vec{s}$.

Ce spin a les dimensions d'un moment cinétique, donc $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$, soit la dimension de \hbar .
Expérimentalement, on mesure $\mu_0 = \frac{\hbar}{2}$ et $g \approx 2$ dans le cas de l'électron.

Pour conclure, le spin de l'électron correspond à un opérateur \hat{s} qui agit sur un espace d'états de dimension deux, et dont les composantes dans une base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont les opérateurs :

$$\hat{s} \cdot \vec{u}_x \quad \hat{s} \cdot \vec{u}_y \quad \hat{s} \cdot \vec{u}_z \quad \text{ou encore} \quad \hat{s} \cdot \vec{u}$$

Si l'on choisit de représenter ces opérateurs dans la base de vecteurs propres $\{ |+\rangle_z, |-\rangle_z \}$, on obtient des matrices de valeurs propres $-\frac{\hbar}{2}$ et $\frac{\hbar}{2}$:

$$\widehat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_1$$

$$\widehat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_2$$

$$\widehat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_3$$

Des relations $\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i \sigma_3$ on tire des relations sur les **commutateurs** de l'opérateur de spin :

$$[\widehat{S}_i, \widehat{S}_j] = \widehat{S}_i \widehat{S}_j - \widehat{S}_j \widehat{S}_i = \varepsilon_{ijk} \hbar \widehat{S}_k \text{ où } \varepsilon_{ijk} \text{ est le tenseur antisymétrique.}$$

Ces relations sont caractéristiques du moment cinétique, elles proviennent de son comportement vis-à-vis des rotations.

On peut montrer qu'un opérateur vectorielle (à 3 composantes) qui vérifie cette relation possède des valeurs propres de la forme $n\hbar$ ou $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas de l'opérateur vectoriel spin \widehat{S} , on parle de nombre quantique de spin :

- les **bosons** ont un nombre quantique de spin entier n_s ;
- les **fermions** ont un nombre quantique de spin demi-entier, de la forme $n_s = n + \frac{1}{2}$.

L'espace des états associés à ces opérateurs de spin est toujours de dimension $2n_s + 1$. Pour $n_s = 3$, les valeurs propres seront $-3\hbar, -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar$, et pour $n_s = 1,5$ ce sera $-1,5\hbar, -0,5\hbar, 0,5\hbar$ et $1,5\hbar$.

Une autre conséquence de ces relations sur les commutateurs concerne la **norme de l'opérateur de spin**, dans le sens suivant :

$$\widehat{S}^2 = \widehat{S}_x \widehat{S}_x + \widehat{S}_y \widehat{S}_y + \widehat{S}_z \widehat{S}_z = \frac{3}{4} \hbar^2 \widehat{Id}$$

mais on peut montrer que dans le cas général on aura : $\widehat{S}^2 = n_s (n_s + 1) \hbar^2$

Intéressons-nous maintenant à un **système de deux qubits**.

Imaginons un espace des états $H_1 = \text{vect} \{ |+\rangle_z, |-\rangle_z \}$ pour le premier qubit, et $H_2 = \text{vect} \{ |+\rangle_z, |-\rangle_z \}$ pour le second.

Alors les quatre mélanges de ces états sont possibles, ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires.

Quel est donc la structure de l'espace des états H qui en résulte ?

Ce sera celle du produit tensoriel des espaces H_1 et H_2 : $H = H_1 \otimes H_2$.

Parenthèse mathématique : Théorème et définition.

- Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{C} .

Il existe un espace vectoriel noté $E \otimes F$
 et une application bilinéaire $\Phi : E \times F \rightarrow E \otimes F$,
 où l'on notera $\Phi(x, y) = x \otimes y$ un vecteur de $E \otimes F$,
 qui possède la propriété universelle suivante :

Pour toute application bilinéaire de $E \times F$ dans n'importe quel espace vectoriel G ,
 il existe une **unique** application **linéaire** \check{g} de $E \times F$ dans $E \otimes F$ telle que :

$$g = \check{g} \circ \Phi \quad \text{ou encore} \quad g(x, y) = \check{g}(x \otimes y).$$

$E \otimes F$ est le **produit tensoriel** de E et F , et $x \otimes y$ le produit tensoriel de x et y .

- De plus, si $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ sont des bases de E et F ,
 alors $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $E \otimes F$.

- On construit ensuite le produit scalaire hermitien sur $H_1 \otimes H_2$ en transportant les produits scalaires de E et F sur H , en posant : $\langle e_i \otimes f_j | e_k \otimes f_l \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}$.

Ainsi, pour deux états quelconques de H muni de la base $(e_i \otimes f_j)$, par exemple

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i \otimes f_j \quad \text{et} \quad |\Psi\rangle = \sum_{k,l} \beta_{kl} e_k \otimes f_l \quad \text{on aura :} \quad \langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^* \beta_{ij}.$$

- Si E et F sont de dimension finie, alors $\dim(E \otimes F) = \dim(E) \times \dim(F)$.

- On peut définir le **produit tensoriel de deux applications linéaires** naturellement de la manière suivante :

Si $f : E \rightarrow E'$ et $g : F \rightarrow F'$ sont deux applications linéaires alors :

$$f \otimes g : E \otimes F \rightarrow E' \otimes F' \quad \text{est défini en posant} \quad f \otimes g(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y).$$

- De même, on peut définir un opérateur agissant sur le système combiné $H = H_1 \otimes H_2$ en définissant le **produit tensoriel de deux opérateurs** de la manière suivante :

Si \widehat{F} est un opérateur sur H_1 et \widehat{G} un opérateur sur H_2 alors $\widehat{F \otimes G}$ est l'opérateur sur $H = H_1 \otimes H_2$ défini par $\widehat{F \otimes G} = \widehat{F} | \Phi_1 \rangle \otimes \widehat{G} | \Psi_2 \rangle$.

Une observable physique est représentée par un opérateur hermitien ; prenons par exemple \widehat{F} opérateur sur H_1 défini dans sa base propre $\{ f_i \}_{i \in I}$ par $\widehat{F} | f_i \rangle = f_i | f_i \rangle$, et un opérateur \widehat{G} sur H_2 défini dans sa base propre $\{ g_j \}_{j \in J}$ par $\widehat{G} | g_j \rangle = g_j | g_j \rangle$.

Alors l'opérateur conjoint $\widehat{F \otimes G}$ sur l'espace global des états H est défini par :

$$\widehat{F \otimes G} (f_i \otimes g_j) = f_i g_j (f_i \otimes g_j)$$

On remarque donc qu'il est diagonal dans la base $(e_i \otimes f_j)$, de valeurs propres les $f_i g_j$.

C'est exactement ce qu'il nous fallait ! Une action linéaire sur les états de H_1 et linéaire sur les états de H_2 correspond à une action linéaire sur un unique espace $H_1 \otimes H_2$.

États séparables et états intriqués.

Prenons maintenant un état général $| \Phi_1 \rangle = \alpha_1 | +^1 \rangle_z + \beta_1 | -^1 \rangle_z$ du premier qubit suivant une direction (Oz) , et un état général $| \Psi_2 \rangle = \alpha_2 | +^2 \rangle_z + \beta_2 | -^2 \rangle_z$ du second qubit toujours suivant la direction (Oz) .

Un état combiné du système global est **séparable** s'il peut être écrit sous la forme

$$| \Phi_1 \rangle \otimes | \Psi_2 \rangle = (\alpha_1 | +^1 \rangle_z + \beta_1 | -^1 \rangle_z) \otimes (\alpha_2 | +^2 \rangle_z + \beta_2 | -^2 \rangle_z)$$
 qui donne par linéarité :

$$| \Phi_1 \rangle \otimes | \Psi_2 \rangle = \alpha_1 \alpha_2 | +^1 \rangle_z \otimes | +^2 \rangle_z + \alpha_1 \beta_2 | +^1 \rangle_z \otimes | -^2 \rangle_z + \beta_1 \alpha_2 | -^1 \rangle_z \otimes | +^2 \rangle_z + \beta_1 \beta_2 | -^1 \rangle_z \otimes | -^2 \rangle_z$$

Ainsi, un état séparable est une combinaison linéaire des vecteurs de base de l'espace des états produit tensoriel $H = H_1 \otimes H_2$, qui est toujours de la forme :

$$a | +_1 \rangle \otimes | +_2 \rangle + b | +_1 \rangle \otimes | -_2 \rangle + c | -_1 \rangle \otimes | +_2 \rangle + d | -_1 \rangle \otimes | -_2 \rangle \text{ avec } ad = bc.$$

Toutes les autres combinaisons linéaires sont des **états intriqués**.

En d'autres termes, un état combiné est séparable s'il correspond au produit d'un état du sous-système 1 et d'un état du sous-système 2, ce qui n'est pas le cas de toutes les combinaisons linéaires d'états possibles.

Par exemples, l'état $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+^1\rangle_z \otimes |-^2\rangle_z - |-^1\rangle_z \otimes |+^2\rangle_z)$ est dit «singulet»,

et l'état $|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+^1\rangle_z \otimes |-^2\rangle_z + |-^1\rangle_z \otimes |+^2\rangle_z)$ est dit «triplet», et ce sont

deux états intriqués et orthogonaux entre eux, puisque la base de l'espace combiné H est orthonormée.

Nous noterons désormais $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$ et $|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle)$

ces états pour simplifier la notation lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Finalement, on peut facilement vérifier que l'espace des états H peut être muni au choix des bases $\{|++\rangle, |--\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle\}$ ou $\{|++\rangle, |--\rangle, |s\rangle, |t\rangle\}$.

Nous allons à présent voir comment un opérateur agit sur cet espace des états $H = H_1 \otimes H_2$.

On munit $H = H_1 \otimes H_2$ de la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ et on considère l'opérateur \widehat{S}_z^1 de mesure du spin de la particule 1 suivant l'axe (Oz) .

Cet opérateur agit uniquement sur l'espace H_1 , mais on peut le promouvoir à H tout entier en le complétant par l'identité sur H_2 de la manière suivante : $\widehat{S}_z^1 = \widehat{S}_z^1 \otimes \widehat{Id}_2$.

Puisque $\widehat{S}_z^1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans H_1 , on obtient facilement les résultats suivants :

$$\widehat{S}_z^1 |++\rangle = \frac{\hbar}{2} |++\rangle \quad \text{et} \quad \widehat{S}_z^1 |+-\rangle = \frac{\hbar}{2} |+-\rangle,$$

$$\widehat{S}_z^1 |-+\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-+\rangle \quad \text{et} \quad \widehat{S}_z^1 |--\rangle = -\frac{\hbar}{2} |--\rangle \text{ dans } H.$$

Ces états sont des vecteurs propres pour l'opérateur, ils ont donc naturellement une valeur bien défini de leur spin vertical, ce qui est bien logique...

En revanche, on obtient aussi $\widehat{S}_z^1 |s\rangle = \frac{\hbar}{2} |t\rangle$ et $\widehat{S}_z^1 |t\rangle = \frac{\hbar}{2} |s\rangle$.

Les états intriqués $|s\rangle$ et $|t\rangle$ n'ont donc pas une valeur bien définie du spin.

Dans la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ l'opérateur s'écrira :

$$\widehat{S}_z^1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et dans la base $\{|++\rangle, |--\rangle, |s\rangle, |t\rangle\}$ il s'écrira :

$$\widehat{S}_z^1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\widehat{S}_x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans H_1 , on obtient également les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \widehat{S}_x^1 |++\rangle &= \frac{\hbar}{2} |-+\rangle & \text{et} & & \widehat{S}_x^1 |+-\rangle &= \frac{\hbar}{2} |--\rangle, \\ \widehat{S}_x^1 |-+\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |++\rangle & \text{et} & & \widehat{S}_x^1 |--\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |+-\rangle \text{ dans } H. \end{aligned}$$

En procédant de même pour $\widehat{S}_y^1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ dans H_1 , on obtient finalement les matrices suivantes dans la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ pour les opérateurs sur H :

$$\widehat{S}_x^1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{S}_y^1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Voyons maintenant comment effectuer une mesure individuelle sur deux qubits intriqués.

- Sur un état séparable $|\Phi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ du système global, la valeur moyenne de l'opérateur étendu \widehat{S}_z^1 se calcule ainsi : $\langle \Psi_2 | \otimes \langle \Phi_1 | \widehat{S}_z^1 | \Phi_1 \rangle \otimes | \Psi_2 \rangle$ puisque $\langle \Psi_2 | \otimes \langle \Phi_1 |$ est le bras associé au ket $|\Phi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$.

Comme $\langle \Psi_2 | \Psi_2 \rangle = 1$, on obtient simplement $\langle \Phi_1 | \widehat{S}_z^1 | \Phi_1 \rangle$, qui n'est autre que la valeur moyenne de l'opérateur \widehat{S}_z^1 sur l'espace H_1 .

Donc tout se passe comme si la particule 1 n'était pas influencée par la particule 2.

- Dans le cas d'un état intriqué $a |++\rangle + b |+-\rangle + c | -+\rangle + d |--\rangle$ que l'on suppose normé, la probabilité de mesurer $\frac{\hbar}{2}$ est $|a^2| + |b^2|$, et celle de mesurer $-\frac{\hbar}{2}$ est $|c^2| + |d^2|$.

Finalement, la moyenne de l'opérateur \widehat{S}_z^1 dans cet état est :

$$\langle \widehat{S}_z^1 \rangle = \frac{\hbar}{2} (|a^2| + |b^2| - |c^2| - |d^2|).$$

On vérifie également que dans l'état $|s\rangle$ ou $|t\rangle$ on obtient $\langle \widehat{S}_z^1 \rangle = 0$.

- On aurait également obtenu ce résultat en utilisant la matrice de \widehat{S}_z^1 et en calculant sa

moyenne dans l'état $|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ en utilisant $\langle \Phi | \widehat{S}_z^1 | \Phi \rangle$.

Faisons-le pour \widehat{S}_x^1 . On obtient alors :

$$\langle \Phi | \widehat{S}_x^1 | \Phi \rangle = (a^*, b^*, c^*, d^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a c^* + b d^* + c a^* + d b^* \in \mathbb{R}.$$

On peut ensuite vérifier que $\langle \widehat{S}_x^1 \rangle = 0$ dans les états $|s\rangle$ et $|t\rangle$.

De même, on montre que $\langle \widehat{S}_y^1 \rangle = 0$ dans les états $|s\rangle$ et $|t\rangle$.

Ainsi, la valeur moyenne $\langle \widehat{S}_{\vec{u}}^1 \rangle$ de tout opérateur de mesure du spin suivant une direction physique quelconque \vec{u} est nulle dans les états $|s\rangle$ et $|t\rangle$.

$$\text{En effet, } \langle \widehat{S}_{\vec{u}}^1 \rangle = \langle \widehat{S}^1 \cdot \vec{u} \rangle = \langle \widehat{S}_x^1 \cdot u_x + \widehat{S}_y^1 \cdot u_y + \widehat{S}_z^1 \cdot u_z \rangle = 0.$$

La particule 1 n'a plus de spin dans toute les directions dans ces états, et vue la symétrie de la situation, c'est bien entendu la même chose pour la particule 2. Ces états n'ont donc pas de spin bien défini, contrairement aux états séparables.

Remarque :

On peut montrer que le produit scalaire de deux états séparables $|\Phi\rangle = |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle$ et $|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ s'exprime à partir des produits scalaires sur H_1 et H_2 de la manière suivante :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle_H = \langle \Phi_1 | \Psi_1 \rangle_{H_1} \times \langle \Phi_2 | \Psi_2 \rangle_{H_2}.$$

Nous pouvons maintenant évoquer le **pseudo-paradoxe E.P.R.** (pour Einstein, Podolsky et Rosen) à propos de la « spooky action at a distance ».

C'est une situation physique faisant intervenir deux qubits dans un état intriqué. Considérons les opérateurs étendus \widehat{S}_z^1 et \widehat{S}_z^2 de mesure du spin vertical des particules.

$$\text{Alors } \widehat{S}_z^{\text{total}} = \widehat{S}_z^1 + \widehat{S}_z^2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$.

Ainsi, dans l'état $|++\rangle$ le spin total donnera pour mesure \hbar , ce qui est bien normal puisque les deux particules sont alors dans un état propre $|+\rangle$.

En revanche, on remarque que les états deux intriqués $|s\rangle = 1/\sqrt{2} * (|+-\rangle - |-+\rangle)$ et $|t\rangle = 1/\sqrt{2} * (|+-\rangle + |-+\rangle)$ sont alors des vecteurs propres de l'opérateur $\widehat{S}_z^{\text{total}}$ de valeur propre 0, donc la mesure du spin total donnera à coup sûr zéro !

Finalement, si l'on mesure le spin de la particule 1 dans un de ces états, on trouvera de manière aléatoire $-\hbar/2$ ou $\hbar/2$, de même pour la particule 2. Mais si l'on mesure le spin total, on obtiendra irrémédiablement 0. Cela signifie que si l'on mesure $-\hbar/2$ pour la particule 1, on mesure nécessairement $\hbar/2$ pour la particule 2. Et cela quelle que soit la distance qui sépare ces deux particules, ce qui suggère une transmission instantanée de l'information. Ce qui a été largement vérifié expérimentalement.

Interprétation de Copenhague :

D'après cette école de pensée philosophique, l'interaction entre l'appareil de mesure et le système perturbe le résultat même de l'observation, en obligeant le système à prendre une position, un peu comme nous le ferions lors d'un sondage politique. En effet, le système se projette dans l'état compatible avec l'opérateur effectuant la mesure, si bien que l'on ne peut plus déterminer quel était l'état exact du système avant la mesure.

Par exemple, si l'opérateur \hat{S}_z^1 mesure $\frac{\hbar}{2}$ dans l'état $|s\rangle = 1/\sqrt{2} * (|+-\rangle - |-+\rangle)$, alors instantanément (ce qui n'a pas de sens en physique) le système se projette dans l'état $|+-\rangle$, si bien que l'opérateur \hat{S}_z^2 ne pourra mesurer que $-\frac{\hbar}{2}$. Et inversement.

Il convient donc de renoncer au déterminisme de la physique, puisque le résultat d'une mesure demeure aléatoire et ne permet plus de décrire la réalité physique. La particule/onde ne possède pas d'état avant cette mesure, et la question n'a d'ailleurs pas de sens.

Einstein pensait que la particule choisissait son état au moment de l'intrication, ce qui a été réfuté depuis, par la preuve de la non existence des variables cachées.

L'existence des états intriqués assure désormais que la notion de non localité est un élément central de la mécanique quantique...