L'inégalité triangulaire

Un neo-TeXnicien

19 février 2020

1 Le cas réel

Démontrons la célèbre inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R} \text{ on a } |x+y| \leq |x| + |y|$$

Partant de la définition suivante de la valeur absolue : $|x| = \max(-x, x)$, on montre facilement les conséquences suivantes :

$$x \leq |x| \text{ et donc } xy \leq |xy| = |x|\,|y| \text{ et aussi } |x|^2 = x^2$$

En utilisant les remarques précédentes, on peut développer $|x+y|^2$:

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = |x|^2+|y|^2+2xy \leq |x|^2+|y|^2+2|x|\,|y| = (|x|+|y|)^2$$

Par **croissance de la fonction racine carrée** sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$|x+y| \leq \big|\,|x| + |y|\,\big| = |x| + |y|$$

Ce qui donne le résultat. On remarque au passage que **l'égalité a lieu** si et seulement si $xy = |x|\,|y|$, c'est-à-dire **si et seulement si x et y sont de même signe**.

2 Conséquence

$$\left\{\begin{array}{l} |x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \\ |y| = |x+y-x| \leq |x+y| + |x| \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x| - |y| \leq |x+y| \\ |y| - |x| \leq |x+y| \end{array}\right. .$$

Et comme $\big|\,|x| - |y|\,\big| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|)$ alors finalement :

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x+y| \text{ et par symétrie } \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y|$$

Cette dernière inégalité montre que la valeur absolue est une application 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, et donc **continue**.

3 Le cas complexe

Dans le cas où x et y sont complexes, on écrit : $x = r_1\,\mathrm{e}^{i\alpha_1}$ et $y = r_2\,\mathrm{e}^{i\alpha_2}$. Alors $x + y = \mathrm{e}^{i\alpha_1}\,(r_1 + r_2\,\mathrm{e}^{i\alpha})$ en posant $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. On a alors :

$$\begin{aligned}|x+y|^2 = (x+y)\overline{(x+y)} &= \mathrm{e}^{i\alpha_1}\,(r_1 + r_2\,\mathrm{e}^{i\alpha})\,\mathrm{e}^{-i\alpha_1}\,(r_1 + r_2\,\mathrm{e}^{-i\alpha})\\ &= (r_1 + r_2\,\mathrm{e}^{i\alpha})\,(r_1 + r_2\,\mathrm{e}^{-i\alpha})\\ &= r_1^2 + 2r_1r_2\cos\alpha + r_2^2\end{aligned}$$

Ce qui donne $|x+y|^2 \leq r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 = (|x| + |y|)^2$, d'où le résultat, comme dans le cas réel. Ici, **l'égalité a lieu** si et seulement si $\cos\alpha = 1$, donc **si et seulement si les vecteurs d'affixes x et y sont colinéaires et de même sens**.

4 Généralisation

4.1 Topologie

En se fondant sur la théorie des ensembles, la topologie générale fournit un vocabulaire et un cadre pour traiter des notions de limite, de continuité et de voisinage.

Un espace topologique est un couple (E, T), où E est un ensemble et T une topologie sur E, à savoir un ensemble de parties de E formant les ouverts de E et vérifiant les propriétés suivantes :

- l'ensemble vide et E appartiennent à T ;
- toute intersection finie d'ouverts est un ouvert : si $O_1, \ldots, O_n$ sont des éléments de T alors $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in T$.
- toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert : si $(O_i)_i \in I$ est une famille d'éléments de T, indexée par un ensemble I quelconque alors : $\bigcup_{i\in I} O_i \in T$

Un fermé d'une topologie est défini comme le complémentaire d'un ouvert. L'adhérence $\overline{X}$ d'une partie X de E est le plus petit fermé qui contient X. Pour un point a de E, on appelle alors voisinage de a pour cette topologie n'importe quelle partie de E qui inclut un ouvert qui contient a.

4.2 Espaces métriques

Dans le cas d'un espace métrique, avec la symétrie et la séparation, l'inégalité triangulaire fait partie de la définition de la distance. La séparation permet de distinguer les différents éléments de l'espace, généralement appelés points. Cette distance induit une topologie par la définition des boules ouvertes, topologie qui dépend donc de cette distance.

4.3 Espaces normés

Dans le cas d'un espace vectoriel normé sur un corps possédant une valeur absolue, la norme induit une distance invariante par translation, et donc compatible avec les opérations vectorielles.

4.4 Espaces préhilbertiens

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dit préhilbertien lorsqu'il est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, hermitien dans le cas complexe.
Il est à priori de dimension infinie, et s'il est complet pour la norme induite par son produit scalaire c'est un espace de Hilbert, l'un des cadres privilégiés de l'analyse fonctionnelle.
En dimension finie, ce sont les espaces euclidiens ou hermitiens.

On peut démontrer qu'une norme vérifiant l'égalité du parallélogramme est issue d'un produit scalaire, obtenu par une des identités de polarisation.

5 Produit scalaire

On se place désormais dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

5.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous vecteurs x et y on a : $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \; \|y\|$. De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.
Dans le cas où $y = 0$ la propriété est évidente.
Dans le cas où $y \neq 0$, considérons la fonction définie pour tout scalaire t par : $P(t) = \|x + ty\|^2$, et posons $t_0 = -\langle x, y \rangle / \|y\|^2$. On a alors :
$0 \leq P(t_0) = \| x \|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 / \| y \|^2$. Ce t_0 n'est autre que la valeur en laquelle P atteint son minimum, mais cette propriété n'est pas utilisée.
L'égalité est équivalente à $P(t_0) = 0$ et donc à $x = -t_0 y$.
Voir l'article sur l'inégalité pour la suite.