- Matrices -

Les **suites numériques** permettent de modéliser des **situations discrètes**, c'est-à-dire dans lesquelles les **étapes successives** dépendent d'**une variable entière**.

Mais certains **problèmes discrets** dépendent de **plusieurs variables**. On peut dire que ce sont des situations de dimension deux, trois ou plus. Pour traiter ces **problèmes vectorielles**, on utilise une notation proche de celle des vecteurs colonnes, les **matrices**, qui ne sont autre que des **tableaux**.

1) Matrices :

Définition 1 :

Une **matrice** A de dimension $m \times n$ est un **tableau** de nombres **réels** possédant :

$$\begin{cases} m \;\; \textit{lignes} \\ n \;\; \textit{colonnes} \end{cases}$$

Sous forme d'un **tableau**, cette **matrice** s'écrit :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & & \text{colonne } j & & \end{array} & \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2j} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ddots & a_{ij} & \ddots & a_{\Im} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} & \text{ligne } i \end{array}$$

Sous forme **condensée**, comme une suite, on écrit : $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$

Les nombres réels a_{ij} sont appelés les **coefficients** de la matrice :

a_{ij} est le coefficient de la ligne n° i et de la colonne n° j.

Exemple : Soit A matrice de dimensions (3×4) définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 8 & 0 & 4 & 11 \\ -3 & 17 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a par exemple $a_{13} = 4$ et $a_{32} = 17$.

Matrice ligne, ou vecteur ligne et Matrice colonne ou vecteur colonne :

Si $m=1$, la matrice est appelée **matrice ligne**, ou **vecteur ligne**,

Par exemple : $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, matrice ligne de taille (1×4).

Si $n=1$, la matrice est appelée **matrice colonne**, ou **vecteur colonne**.

Par exemple : $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, matrice colonne de taille (3×1).

Matrice carrée d'ordre n :

Si $m=n$, la matrice est appelée **matrice carrée d'ordre** $\boldsymbol{n}$.

Par exemple : $C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \\ 2 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, matrice carrée d'ordre 3.

L'ensemble des **matrices carrées d'ordre** $\boldsymbol{n}$ se note $M_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, la matrice précédente $C\in M_3(\mathbb{R})$.

Matrice symétrique d'ordre n :

$A(n\times n)$ est une **matrice** carrée **symétrique** si et seulement si : $a_{ij}=a_{ji}$ pour tout $i\neq j$.

Par exemple : $A=\begin{pmatrix} * & -2 & 0 & 7 \\ -2 & * & 5 & 8 \\ 0 & 5 & * & -6 \\ 7 & 8 & -6 & * \end{pmatrix}$, matrice symétrique d'ordre 4.

- Les coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale : $a_{23}=a_{32}=5$.
- Les coefficients de la diagonale peuvent être quelconques.

Matrice triangulaire d'ordre n :

La matrice carré d'ordre 4 suivante, $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure,

tandis que la matrice suivante $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est dite strictement triangulaire inférieure.

Matrice diagonale d'ordre n :

$A(n\times n)$ est une **matrice** carrée **diagonale** si et seulement si : $a_{ij}=0$ pour tout $i\neq j$.

Par exemple : $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrice diagonale d'ordre 4 .

Seuls ses éléments diagonaux sont non nuls.

Matrice **Unité** d'ordre n :

$A(n\times n)$ est une **matrice** carrée **unité d'ordre** $\boldsymbol{n}$ si et seulement si :

$a_{ij}=0$ pour tout $i\neq j$ et $a_{ij}=1$ pour tout $i=j$.

La **matrice unité d'ordre** $\boldsymbol{n}$ se note $\mathbf{I}_n$.

Par exemples, $\mathrm{I}_1=(1)$, $\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 , et les autres coefficients sont nuls.

2) Opérations sur les matrices :

L'**addition** et la **soustraction** de deux matrices de mêmes dimensions ne posent aucun problème.

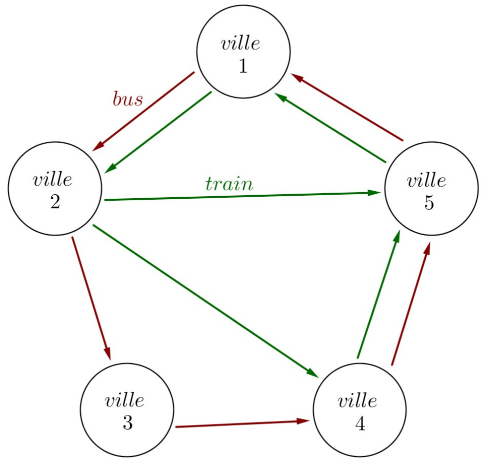
La **multiplication** d'une matrice **par un scalaire** (nombre réel) ne pose aucun problème non plus.

Exemple : On donne $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, matrices de dimensions (2×3).

Alors $2A-3B=\begin{pmatrix} 8 & -8 & 30 \\ -12 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, combinaison linéaire de A et B.

Applications : **Graphes.**

Sur le schéma suivant appelé graphe, on a fléché les trajets possibles en bus et en train, dans la direction des flèches.



On peut représenter ces possibilités à l'aide d'une matrice de dimensions $(arrivée \times départ)$ par exemple.

Pour les bus, on aurait la matrice : $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Écrire la matrice T correspondante pour les trains.

2) Que représente la matrice $M=B+T$?

Définition 2 : Transposition d'une matrice.

La transposée ${}^tA$ d'une matrice $A(m\times n)$ est la matrice de taille $(n\times m)$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

Par exemple : Si $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

En notant $A=(a_{ij})$ et ${}^tA=(b_{ij})$ alors on a $b_{ij}=a_{ji}$ pour tout $1\leqslant i\leqslant m$ et $1\leqslant j\leqslant n$.

Remarques :

- la transposée d'un vecteur colonne est un vecteur ligne, et inversement :

$$\text{Si } U=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\end{pmatrix} \text{ alors } {}^tU=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} \text{ et si } V=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} \text{ alors } {}^tV=\begin{pmatrix}3 & -4\end{pmatrix}.$$

- une matrice S est symétrique si et seulement si ${}^tS=S$.

Définition 3 : Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne.

C'est la somme des produits des coefficients du vecteur ligne avec les coefficients correspondants du vecteur colonne, comme un produit scalaire entre deux vecteurs.

Par exemple : $\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\7\\-4\end{pmatrix}=3\times1-2\times7+5\times(-4)$.

On généralise cette opération à deux matrices quelconques A et B pourvu que le nombre de colonnes de la matrice A corresponde au nombre de lignes de la matrice B.

Définition 4 : Produit de deux matrices.

Le produit de la matrice $A(m\times n)$ par la matrice $B(n\times p)$ est la matrice $C(m\times p)=A\times B$ dont chaque coefficient $(C_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B : $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kj}$ pour tout $1\leqslant i\leqslant m$ et $1\leqslant j\leqslant n$.

Par exemple : $\begin{pmatrix}-2 & 6 & 8\\7 & 3 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\-3 & 5\\4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\times1+6\times(-3)+8\times4 & -2\times2+6\times5+8\times0\\7\times1+3\times(-3)-11\times4 & 7\times2+3\times5-1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 26\\-46 & 29\end{pmatrix}$

Cas de la matrice unité : Par exemple : $\begin{pmatrix}6 & 4 & -2\\2 & 5 & -3\\-1 & 0 & -5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4 & -2\\2 & 5 & -3\\-1 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

Et pour toute matrice carrée A_n on a : $A_n\times I_n=I_n\times A_n=A_n$.

Remarques : Le produit entre matrices est :

- **associatif** : $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C=A\times B\times C$;
- **distributif** par rapport à l'addition : $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$;
- **non commutatif** en général : $A\times B\neq B\times A$.

Applications : **Marches aléatoires.**

Tous les ans, 1/5ème des habitants de la ville 1 migrent dans la ville 2 .
En revanche, 3/10ème des habitants de la ville 2 migrent dans la ville 1 .

1) Écrire la **matrice de transition** $M(\textit{arrivée}\times\textit{départ})$ qui donne les fréquences de passage d'une ville à l'autre.

2) On sait qu'au départ il y a 40 habitants dans la ville 1 et 1 000 dans la ville 2 .

On note $P_0=\begin{pmatrix}40\\1\,000\end{pmatrix}$ la matrice colonne donnant cette répartition par ville.

Donner la matrice P_1 donnant la répartition au bout d'un an.

3) Déterminer les matrices P_2 et P_3 .

4) Que se passe-t-il si au départ $P_0=\begin{pmatrix}600\\400\end{pmatrix}$?

Utilisation de la calculatrice pour manipuler des matrices :

T.I. :

- menu matrice, éditer la matrice, donner ses dimensions et la remplir ;
- quitter, puis sélectionner les matrices pour les calculs avec le menu matrice.

Casio :

- menu matrice, éditer la matrice, donner ses dimensions et la remplir ;
- quitter, et utiliser les matrices avec le mot **Mat** du clavier placé avant leurs noms..

3) Systèmes linéaires et matrices :

Exemple :

Déterminer la parabole passant par $(-1;10)$ et $(2;4)$ et de tangente de coefficient directeur 1 au point d'abscisse 1.

On note $f(x)=ax^2+bx+c$ la fonction trinôme associé à la parabole recherchée.

On traduit les renseignements de l'énoncé, et on obtient le système suivant, de trois équations à trois inconnues a, b et c : $\begin{cases} a-b+c=10 \\ 4a-2b+c=4 \\ 2a+b=1 \end{cases}$.

Ce système peut se traduire avec des matrices ainsi : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

en notant $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le vecteur colonne inconnu et $B=\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

on obtient l'écriture matricielle du système : $AX=B$.

Le système est dit **linéaire** car il est de degré 1 en inconnues :

une expression de la forme a^3 est de degré 3 en inconnue, et une expression de la forme bc est de degré 2 en inconnues.

Autrement dit, un **système d'équations** est **linéaire**, si et seulement si les équations expriment des combinaisons linéaires des inconnues : $\alpha a+\beta b+\gamma c$.

Exemple de système non linéaire :

Déterminer deux nombres dont la somme vaut S et le produit P, deux nombres réels donnés.

Les deux nombres cherchés vérifient le système : $\begin{cases} a+b=S \\ ab=P \end{cases}$;

or ce système est de degré 2 en a et b, à cause de la deuxième ligne.

Il est impossible de traduire ce système avec une matrice. Essayez !

Résolution : on a alors $b=S-a$ et donc $a(S-a)=P$, ce qui donne : $a^2-Sa+P=0$;

de même, le nombre b est solution de la même équation du second degré $x^2-Sx+P=0$,

puisque le système initial est symétrique par rapport aux inconnues a et b :

si $(a;b)$ est solution alors $(b;a)$ l'est également.

Si ces deux nombres existent, alors ils sont solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$.

Il faut donc nécessairement : $S^2-4P\geqslant 0$.

Définition 5 : Écriture matricielle d'un système linéaire.

On considère le système linéaire (S) de n équations à n inconnues $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ suivant :

$$(S)\ :\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

on obtient l'écriture matricielle du système : $AX = B$.

Exemple : En écrivant leurs équations cartésiennes, déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux droites suivantes :

$$d_1 = \left(A(3\,;-4);\ \vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \text{ et } d_2 = d\left(B(0\,;-3);\ \vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\right)$$

On doit obtenir le système suivant : $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 5x - 2y = 6 \end{cases}$ que l'on peut écrire : $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$.

En notant $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ ce système s'écrit bien $AX = B$.

4) Inverse d'une matrice carrée :

Définition 6 : Inverse d'une matrice carrée.

Une matrice carrée $A(n \times n)$ est dite inversible si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n, appelée inverse de A et notée A^{-1} telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n.$$

Dans l'exemple précédent, si A est inversible, on pourra écrire :

$$\left.\begin{array}{r} AX=B \\ A^{-1}A=I_n \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow I_nX=A^{-1}B$$, donc la solution cherchée est $X=A^{-1}B$.

Il reste alors à savoir si A est inversible, à calculer A^{-1} puis $A^{-1}B$.

Exercices : équation polynomiale vérifiée par une matrice A pour déterminer A^{-1}

Définition 7 : Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soit $A(2\times2)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

On appelle **déterminant** de A le nombre noté $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

Pour la matrice précédente, $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-5\times(-2)=6$.

Propriété 1 : Critère d'inversibilité.

Une **matrice carrée** d'ordre 2 est **inversible** si et seulement si son déterminant est non nul.

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det(A)\neq0$ alors A^{-1} existe, et $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque : A est une matrice inversible d'inverse B ssi $A\times B=I_n$ ou $B\times A=I_n$.

Exemple : Pour la matrice de l'exemple des deux droites, on a alors : $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

On en déduit la solution du système :

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2\times10+2\times6 \\ -5\times10+2\times6 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -8 \\ -38 \end{pmatrix} ;$$

ce qui donne la solution : $\begin{cases} x=-\dfrac{4}{3} \\ y=-\dfrac{19}{3} \end{cases}$, les coordonnées du point d'intersection.

Remarque :

Considérons deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et la matrice $A=(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$ représentant ces deux vecteurs colonne. Alors $\det(A)=xy'-x'y$.

Autrement dit, A est inversible si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, donc si leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Propriété 2 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Si le vecteur colonne $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est solution du système matriciel $AX=B$, alors :

- Si A est inversible (ou **régulière**), le système admet une unique solution $X=A^{-1}B$.
- Si A n'est pas inversible (ou **singulière**) alors :
  - soit le système n'admet aucune solution,
  - soit il en admet une infinité.

Exercice : Résoudre l'exemple de la parabole en inversant la matrice à la calculatrice. Donner ensuite l'équation de la parabole recherchée.

5) Puissances d'une matrice carrée :

Définition 8 : Puissance $n-ième$ d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3.

On appelle puissance n-ième de la matrice A la matrice : $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\ fois}$

Et pour toute matrice carrée A d'ordre n, on a : $A^0=I_n$.

Exercice :

i) On donne $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis A^3 à la main.

ii) On donne $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer B^2 puis B^{-1} à la calculatrice.

Dans la pratique, il est assez difficile de calculer les puissances d'une matrice, surtout pour celles de grande taille, mais également difficile d'obtenir des formules explicites pour A^n. Sauf pour les matrices diagonales, pour lesquelles il suffit d'élever les coefficients de la diagonale à la puissance n.

Exercice : On donne $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$. Calculer D^2 et D^3 puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$.

Par exemple, si une suite de matrices colonnes X_n vérifie la relation de récurrence des suites géométriques, à savoir :

$X_{n+1}=AX_n$ de terme initial X_0, alors $X_n=A^nX_0$ pour tout entier n.

Exercices : Relations entre une matrice A et une matrice nilpotente N afin d'obtenir des relations vérifiées par la matrice A^n.

6) Diagonalisation d'une matrice d'ordre 2 :

Définition 9 : On dit qu'une matrice carrée A d'ordre 2 est diagonalisable ssi :

$$\left.\begin{array}{l} -\textit{il existe une matrice diagonale } D=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \\ -\textit{il existe une matrice inversible } P \textit{ d'ordre } 2 \end{array}\right\} \text{ telles que } A=PDP^{-1}.$$

Dans ce cas, on a : $A^n=PD^nP^{-1}$ pour tout entier n, avec $D^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$.

Exercice : Démontrer la dernière relation par récurrence sur n.

Exercice : On donne $A=\begin{pmatrix}-25 & -14\\ 42 & 24\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

i) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
ii) Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
iii) En déduire la diagonalisation de la matrice A.
iv) Quel est la limite de A^n lorsque $n\to+\infty$?

Définition 10 : Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

- On dit que le vecteur colonne $V=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ est un **vecteur propre** de la matrice A si et seulement si : il existe un réel λ tel que $AV=\lambda V$.

- Le réel λ est alors appelé la **valeur propre associée** au **vecteur propre** V.

Exemple : On donne $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & 8\end{pmatrix}$.

Montrons que $U=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de la matrice A.

Propriété 3 :

Une matrice carrée A d'ordre 2 est **diagonalisable** si et seulement si elle admet deux vecteurs propres U et V non colinéaires.

Autrement dit : A est diagonalisable si et seulement si :

il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et deux vecteurs colonnes U et V non colinéaires tels que :

$AU=\alpha U$ et $AV=\beta V$ (avec éventuellement $\alpha=\beta$).

Diagonalisation :

La matrice diagonale est alors $D=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, et l'on a $A=PDP^{-1}$.

La matrice $P=\begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix}$ exprime les coordonnées des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base de départ $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Dans l'exemple précédent, les vecteurs U et V étant non colinéaires, la matrice est donc bien diagonalisable.

Principe :

On préfère travailler avec une matrice diagonale plutôt qu'avec la matrice de départ.

Alors on cherche :

- Toutes les valeurs propres de la matrice
- Les vecteurs propres associés
- Puis à savoir si la matrice est diagonalisable
- Si c'est le cas, on effectue les opérations sur la matrice diagonale, puis on revient à la matrice de départ en utilisant la matrice de passage

Étude complète d'un exemple : Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

Diagonalisons A puis exprimons A^n en fonction de n.

On cherche deux vecteurs propres $U=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$, donc tels que $AU=\alpha U$ et $AV=\beta V$.

Cela se traduit par les systèmes suivants : $\begin{cases}a+2b=\alpha a\\ 2a+4b=\alpha b\end{cases}$ et $\begin{cases}c+2d=\beta c\\ 2c+4d=\beta d\end{cases}$ qui s'écrivent :

$$\begin{cases}(1-\alpha)a+2b=0\\ 2a+(4-\alpha)b=0\end{cases} \text{ et } \begin{cases}(1-\beta)c+2d=0\\ 2c+(4-\beta)d=0\end{cases}.$$

Si ces deux systèmes d'inconnue $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ admettent une unique solution, cette solution ne peut être que $(0;0)$, qui en est déjà une !

Les vecteurs propres U et V seront alors égaux au vecteur nul, donc colinéaires, ce qui est impossible. Donc ces systèmes admettent une infinité de solutions, qui est une droite solution. En effet, on peut facilement exprimer l'inconnue a en fonction de l'inconnue b, qui est une relation de proportionnalité.

Ces systèmes, qui se ressemblent, ont donc un déterminant nul.

Si l'on appelle λ l'une des valeurs propres α ou β, on doit avoir un déterminant nul pour le système générique suivant : $\begin{cases}(1-\lambda)a+2b=0\\ 2a+(4-\lambda)b=0\end{cases}$, qui s'écrit $\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, de déterminant $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}$.

$$\text{Or } \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\lambda)(4-\lambda)-4=0\Leftrightarrow\lambda^2-5\lambda=0.$$

Cette équation admet deux solutions distinctes $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=5$, qui sont les valeurs propres α et β de la diagonalisation de la matrice A.

La matrice diagonale correspondante est donc $D=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

Remarque : Si cette équation n'avait pas de solution, la matrice A ne serait pas diagonalisable.

Passons maintenant à la détermination des vecteurs propres U et V associées aux valeurs propres $\alpha=0$ et $\beta=5$. Comme les systèmes admettent une infinité de solutions, on recherche des coordonnées simples :

- $\alpha=0$ donne $a=-2b$, alors si $b=1$ on a $a=-2$, donc on prend $U=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$;
- $\beta=5$ donne $2c=d$, alors si $c=1$ on a $d=2$, donc on prend $V=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Finalement, la matrice de passage P entre A et sa matrice diagonale D est $P=\begin{pmatrix}U & V\end{pmatrix}$, donc :

$$P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\text{, de matrice inverse } P^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

On obtient alors : $A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0^n & 0\\0 & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^{n-1} & 2\times5^{n-1}\\2\times5^{n-1} & 4\times5^{n-1}\end{pmatrix}=5^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$.

<u>Applications avec les matrices</u> :

Étude de suites ; suites $X_{n+1}=AX_n$ et $X_{n+1}=AX_n+B$, voir aussi $X_{n+1}=X_nA+B$.

Convergence, états stables ; marches aléatoires et graphes probabilistes.