Fiche d'exercices sur la divisibilité et les congruences.

Multiples et diviseurs.

Exercice n°1 :

Déterminer la liste des diviseurs de 150 puis de 230 .

Exercice n°2 :

1) Déterminer les diviseurs de 21 .
2) Montrer sans la résoudre que l'équation $n(n+2)=21$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$.
3) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $(n^2-1)(n^3-1)=21$.

Exercice n°3 :

Déterminer les couples $(x;y)$ d'entiers naturels qui vérifient : $x^2=y^2+21$.

Exercice n°4 :

Déterminer les couples $(x;y)$ d'entiers naturels tels que : $x^2-2xy=15$.

Exercice n°5 :

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(n-3)$ divise $(n+5)$.

Exercice n°6 :

Déterminer tous les couples d'entiers naturels a et b tels que $a^2-b^2=28$.

Exercice n°7 :

a , b et c sont des entiers non nuls. Démontrer que si a divise b et c , alors a^2 divise bc .

Exercice n°8 :

1) Montrer que si n est pair alors n^2 est pair.
2) Montrer que si n est impair alors n^2 est impair.
3) En déduire que n^2-n est toujours divisible par 2 .

Exercice n°9 :

Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient : a) $n^2+n=20$ b) $n^2+2n=35$.

Exercice n°10 :

Déterminer les entiers relatifs n tels que : a) $n+3$ divise $3n-4$ b) $n+3$ divise $n+10$.

Exercice n°11 :

k étant un entier naturel, on pose $a=9k+2$ et $b=12k+1$.
Quels peuvent être les diviseurs positifs communs aux nombres a et b ?

Divisions euclidiennes.

Exercice n°12 :

La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels ?

Exercice n°13 :

Trouver les entiers naturels n qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste.

Exercice n°14 :

Trouver un entier naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.

Exercice n°15 :

Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.

Exercice n°16 :

Si l'on divise un entier A par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de A par 6 ?

Exercice n°17 :

Si l'on divise un entier A par 6, le reste est 4.
Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

Exercice n°18 :

La division euclidienne de a par b donne a = 625b + 8 634. De quels naturels peut-on augmenter à la fois a et b sans changer de quotient.

Congruences.

Exercice n°19 :

Pour chaque valeur de a donnée, trouver un relatif x tel que :
$a \equiv x \pmod 9$ et $-4 \leqslant x < 5$

a) $a = 11$ c) $a = 62$ e) $a = -12$

b) $a = 24$ d) $a = 85$ f) $a = 32$

Exercice n°20 :

Démontrer que pour tout naturel k, on a : $5^{4k} - 1$ divisible par 13.

Exercice n°21 :

Trouver les restes de la division euclidienne par 7 des nombres :
$351^{12} \times 85^{15}$ et $16^{12} - 23^{12}$

Exercice n°22 :

Trouver les restes de la division euclidienne par 11 des nombres suivants :
12^{15}, 10^7, 78^{15}, 13^{12}, $(-2)^{19}$.

Exercice n°23 :

Vérifier que $2^4 \equiv -1 \pmod{17}$ et $6^2 \equiv 2 \pmod{17}$. Quel est le reste de la division par 17 des nombres $1\,532^{20}$ et 346^{12}.

Exercice n°24 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les système suivants :

a) $\begin{cases} x \equiv -2 \pmod 5 \\ x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2 \equiv -1 \pmod 7 \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases}$

Exercice n°25 :

Le nombre n désigne un naturel.

a) Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisible par $n + 1$.
b) Déterminer l'ensemble de valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.
c) En déduire que, quel que soit n, $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

Exercice n°26 :

Démontrer que pour tout entier naturel n, $5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11.

Exercice n°27 :

a) Démontrer que pour tout entier n, n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4, modulo 8

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(n+3)^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$

Exercice n°28 :

a) Quels sont les restes possibles de la division de 3^n par 11 ?

b) En déduire les entier n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11.

Exercice n°29 :

Déterminer les entiers n tels que $2^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice n°30 :

x est un relatif.

a) Déterminer les restes de la division euclidienne de x^3 par 9 selon les valeurs de x.

b) En déduire que pour tout relatif x :
- $x^3 \equiv 0 \pmod 9$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod 3$.
- $x^3 \equiv 1 \pmod 9$ équivaut à $x \equiv 1 \pmod 3$.
- $x^3 \equiv 8 \pmod 9$ équivaut à $x \equiv 2 \pmod 3$.

c) x, y, z sont des relatifs tels que : $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9.
Démontrer que l'un des nombres x, y, z est divisible par 3.

Exercice n°31 :

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$, des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 7.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 3.

c) k est un relatif. Vérifier que si $x = 1 + 21k$ ou $x = -2 + 21k$ alors $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 42.

Exercice n°32 :

Vrai-Faux

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Proposition 1 : Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2.

Proposition 2 : 11^{2011} est congru à 4 modulo 7

Proposition 3 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5). »

51 Vrai ou falsifié ?

Ce billet est-il un faux ? Le numéro de série peut nous donner une première indication. Il est composé d'une lettre et de onze chiffres. La lettre correspond à un nombre de 1 à 26 en suivant l'ordre alphabétique (la lettre s correspond à 19). En remplaçant la lettre par le nombre correspondant, on constitue un nombre à 12 ou 13 chiffres. Ce nombre doit avoir 8 comme reste dans la division euclidienne par 9.

1. Montrer que la somme $\sum$ des chiffres (incluant ceux correspondants à la lettre) doit vérifier $\sum \equiv 8 \ [9]$.

2. Vérifier alors sans calculatrice si ce billet est faux.

3. Déterminer le chiffre manquant d'un billet non falsifié, dont un chiffre du numéro u49834■82406 a été masqué.