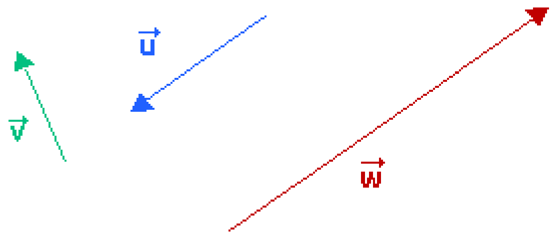
1) Vecteurs colinéaires :

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan.
Sinon, deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'ils ont des **directions parallèles**.

Un vecteur est défini par trois données :

- une **direction** (droite)
- un **sens** (flèche)
- une **norme** (longueur)



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, mais ne sont pas colinéaires à $\vec{v}$.

Dans ce chapitre on s'intéresse essentiellement à la direction donnée par un vecteur.

> Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel non nul k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

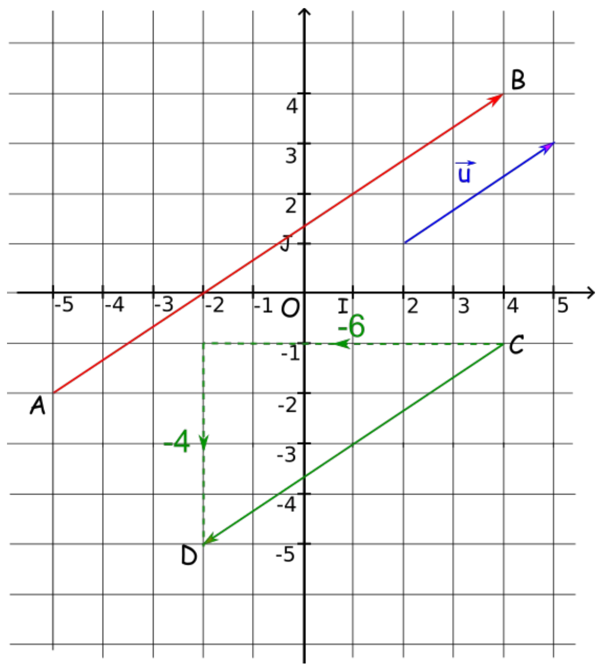
En multipliant un vecteur par un nombre réel k , on peut changer sa longueur ou son sens (grâce au signe du nombre k), mais jamais sa direction.

Exercice n°1 : Exprimer les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{CD}$ les uns en fonction des autres :

$\vec{AB}=\ldots\ldots\times\vec{u}$ puis $\vec{u}=\ldots\ldots\times\vec{AB}$

$\vec{u}=\ldots\ldots\times\vec{CD}$ puis $\vec{CD}=\ldots\ldots\times\vec{u}$

$\vec{AB}=\ldots\ldots\times\vec{CD}$ puis $\vec{CD}=\ldots\ldots\times\vec{AB}$



Avec des **coordonnées**, dans un **repère orthonormal** $(O;\vec{i},\vec{j})$, cela se traduit par :

> Deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement leur **déterminant est nul**.
>
> Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$.

Exercice n°2 : Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les vecteurs suivants :

$$\vec{u}=-6\vec{i}+9\vec{j}\ ,\ \vec{v}=3\vec{i}+5\vec{j}\ \text{ et }\ \vec{w}=4\vec{i}-6\vec{j}$$

- Déterminer les couples de vecteurs colinéaires.
- Déterminer le coefficient de proportionnalité entre les vecteurs colinéaires.

2) Ensemble de points :

Exemple n°1 :

On cherche les nombres x et y solutions d'une équation du type : $3x-2y+5=0$.

Une solution de cette équation n'est pas un nombre, mais un **couple de nombres** $(x;y)$, que l'on peut voir comme les **coordonnées d'un point** dans un repère.
Dans la pratique, on choisit toujours un **repère orthonormal**, car les calculs de longueurs y sont possibles en utilisant la propriété de Pythagore.

a) Commencer par compléter ce tableau pour trouver des couples solutions.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-2	-1/2							

b) Placer les points correspondants dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 carreaux.

c) On aurait pu exprimer y en fonction de x pour nous faciliter la tâche :

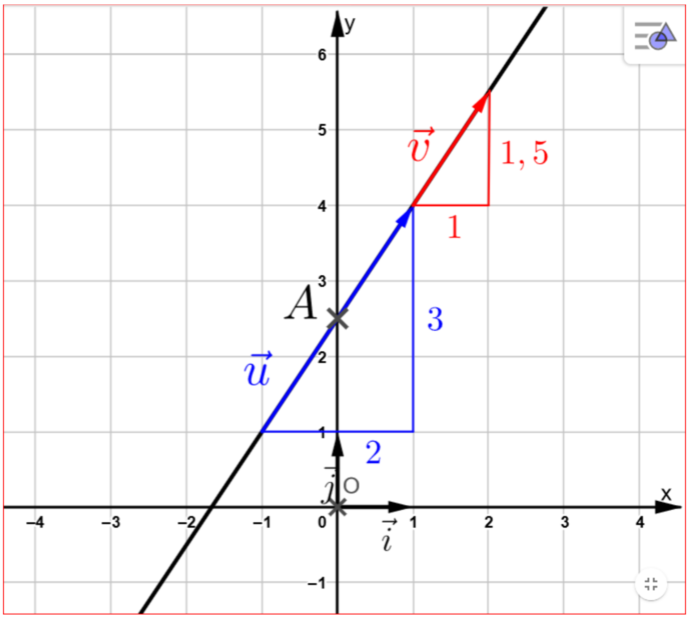
L'équation $3x-2y+5=0$ donne $3x+5=2y$ et donc $y=\frac{3x+5}{2}$ ou encore $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$.

Alors si $x=0$ on obtient $y=\frac{5}{2}=2{,}5$, et si $x=1$ on obtient $y=\frac{8}{2}=4$ par exemples.

Ce qui permet d'obtenir deux points $A(0;2{,}5)$ et $B(1;4)$ appartenant à la droite.

Cette équation est de la forme $y=mx+p$, qui est l'**équation réduite** de la droite de **coefficient directeur** $m=\frac{3}{2}$ et d'**ordonnée à l'origine** $p=\frac{5}{2}$.

d) Traçons cette droite d'équation réduite $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.



On observe que cette droite passe par le point A de coordonnées $(0;5/2)$, d'où le nom **d'ordonnée à l'origine** pour le nombre $5/2$.

Sa **pente**, ou coefficient directeur, vaut $3/2$.

Cela signifie qu'en se déplaçant le long de cette droite, lorsque la variable x augmente de 1 , alors la variable y augmente de $3/2=1{,}5$.

On peut également dire que la droite d'équation $y=1{,}5x+2{,}5$ a pour **vecteur directeur** le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1{,}5\end{pmatrix}$.

On peut tout aussi bien dire que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite d'équation $3x-2y+5=0$.
Sous cette forme, on voit apparaître dans l'équation de la droite les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$.
Le long de cette droite, lorsque la variable x augmente de 2 unités, alors la variable y augmente de 3 unités.

Exercice n°3 :

On donne des droites par la donnée de leur **équation réduite** ou d'une **équation générale**.
Dans chacun des cas, donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite.
Tracer ensuite ces droites dans un repère orthonormal.

1) (d_1) : $y=3x-5$

2) (d_2) : $2x+3y-2=0$

3) (d_3) : $y=-4x+7$

4) (d_4) : $-4x+5y-3=0$

Exemple n°2 :

On se donne un point $A(3;-2)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On cherche à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire au vecteur $\vec{u}$.
On sait dans ce cas qu'il existe un réel non nul k tel que $\overrightarrow{AM}=k\times\vec{u}$.

Exercice n°4 :

1) Déterminer les coordonnées du point B vérifiant $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}$.

2) Déterminer les coordonnées du point C vérifiant $\overrightarrow{AC}=-3\vec{u}$.

3) Placer les points A, B et C ainsi que le vecteur $\vec{u}$ sur une figure.
Que remarque-t-on ?

4) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$.

5) Que peut-on dire d'un point M vérifiant une relation du type $\overrightarrow{AM}=k\times\vec{u}$?

Exemple n°3 : Généralisation.

On reprend le point $A(3;-2)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ précédents.

Exercice n°5 :

Montrer qu'un point $M(x;y)$ du plan est tel que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\vec{u}$ si et seulement si les coordonnées x et y du point M vérifient l'équation suivante : $5x+4y-7=0$.
(utiliser le déterminant de deux vecteurs).

Exercice n°6 : On donne les points $E(-5;3)$ et $F(4;-2)$.

1) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (EF).

2) Déterminer une **équation catésienne** de la **droite** (EF), c'est-à-dire une équation de la forme $\boldsymbol{ax+by+c=0}$, en suivant la même méthode qu'à l'exercice précédent.

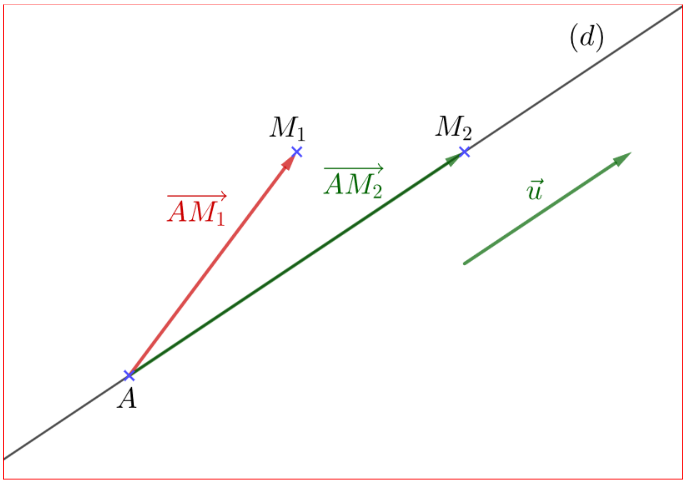
En résumé :

Une droite peut être définie à partir de deux points, ou d'un point et d'une direction.
Il est pratique de donner cette direction sous la forme d'un vecteur directeur de la droite.

La droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, c'est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\vec{u}$, donc tels que $\overrightarrow{AM}=k\vec{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AM_1}$ n'est pas colinéaire au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d), donc le point M_1 n'appartient pas à (d).

Le vecteur $\overrightarrow{AM_2}$ est colinéaire à $\vec{u}$, donc le point M_2 appartient à (d).



3) Équations cartésiennes d'une droite :

Toute droite du plan peut être représentée par une équation de la forme $\boldsymbol{ax+by+c=0}$, appelée **une équation cartésienne** de la droite.

Exemples :

Soit (d_1) la droite d'équation cartésienne $5x-3y+2=0$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Le point $A(6;4)$ n'appartient pas à (d_1) car $5\times6-3\times4+2=20\neq0$.
- En revanche, le point $B(2;4)$ appartient à (d_1) car $5\times2-3\times4+2=0$.

Soit (d_2) la droite passant par le point $C(-5;2)$ et de vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

Prenons un point M quelconque du plan, et notons $(x;y)$ ses coordonnées.
Alors ce point M appartient à la droite (d_2) si et seulement si $\overrightarrow{CM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, donc si et seulement si le déterminant de ces deux vecteurs est nul.

Comme $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+5\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ cela donne : $\begin{vmatrix}x+5 & 3\\y-2 & -4\end{vmatrix}=-4(x+5)-3(y-2)=0$

et donc $-4x-20-3y+6=0$

soit $-4x-3y-14=0$

En multipliant cette dernière équation par -1, on obtient une équation cartésienne équivalente pour la droite (d_2) : $4x+3y+14=0$.

Une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Exercice n°7 : Cas particuliers.

Premier cas particulier : $a=0$.

- On donne la droite d'équation $-3y+6=0$.
- Donner un vecteur directeur de cette droite. En déduire la position de cette droite.
- Donner une équation simplifiée de cette droite.
- Donner l'expression d'une fonction f correspondant à cette droite.

Deuxième cas particulier : $b=0$.

- On donne la droite d'équation $4x+12=0$.
- Donner un vecteur directeur de cette droite. En déduire la position de cette droite.
- Donner une équation simplifiée de cette droite
- Cette droite correspond-t-elle à une fonction ?

Troisième cas particulier : $c=0$.

- On donne la droite d'équation $4x-3y=0$.
- Donner un vecteur directeur de cette droite.
- Exprimer y en fonction de x.
- Donner l'expression d'une fonction g correspondant à cette droite.
- Par quel point particulier cette droite passe-t-elle ?

Exercice n°8 : On considère la droite (Δ) d'équation cartésienne $3x-2y-5=0$.

1) Tracer cette droite dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.

3) Donner l'équation réduite de cette droite (l'expression de y en fonction de x).

4) Donner le coefficient directeur de cette droite et un vecteur directeur $\vec{v}$.

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite avec les axes du repère.

4) Droites parallèles :

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires, ou des coefficient directeurs égaux.

Exercice n°9 : Déterminer si les droites suivantes sont parallèles.

1) $(d_1)\ :\ y=-3x+4$ $\qquad (d_2)\ :\ y=\dfrac{7-12x}{3}$

2) $(d_1)\ :\ 3x-5y+7=0$ $\qquad (d_2)\ :\ -6x+10y-11=0$

3) $(d_1)\ :\ y=3x-8$ $\qquad (d_2)\ :\ -2x+\dfrac{2}{3}y+6=0$

Remarque :

Deux droites sont soit parallèles, soit sécantes.

- Si elles sont sécantes, elles possèdent un unique point en commun.
- Si elles sont parallèles, deux cas sont possibles :
  - soit elles sont strictement parallèles et ne possèdent aucun point commun
  - soit elles sont confondues et possèdent alors une infinité de points communs

5) Intersection de deux droites :

Déterminer l'intersection des droites suivantes, en résolvant dans chaque cas un système de deux équations à deux inconnues.

1) $(d_1)\ :\ y=3x-5$ et $(d_2)\ :\ y=-4x+9$

2) $(d_1)\ :\ 3x-5y+4=0$ et $(d_2)\ :\ -7x+y-3=0$

3) $(d_1)\ :\ 2x+3y-1=0$ et $(d_2)\ :\ -5x+7y+4=0$

4) $(d_1)\ :\ 7x-3y+2=0$ et $(d_2)\ :\ y=-2x+3$