Un peu de rangement...

Sur un article de « Pour la Science » écrit par Jean-Paul Delahaye.

Connaissez-vous le principe des tiroirs ?

> Si l'on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, un tiroir contiendra au moins deux chaussettes !

Simple, mais pas simpliste, ce principe est plutôt efficace. Jugez-en vous même.

Premier exemple :

Si l'on se donne $k+1$ entiers, il s'en trouve deux dont la différence est un multiple de k .

Preuve :

Nous avons k restes possibles dans la division par k , nos k tiroirs, mais $k+1$ résultats à ranger dans ces k tiroirs. Il y aura donc forcément deux restes identiques parmi ces entiers, donc deux de ces entiers ont une différence avec un reste nul, donc divisible par k .

Deuxième exemple :

Si l'on se donne 10 entiers quelconques composés de 2 chiffres, il existe parmi eux deux sous-ensembles disjoints de nombres ayant la même somme.

Preuve :

Il y a $2^{10}=1024$ sous-ensembles possibles.
En effet, pour chacun des 10 entiers, on a le choix de le prendre ou de ne pas le prendre dans un sous-ensemble, ce qui fait 2^{10} sous-ensembles possibles, dont l'ensemble des 10 entiers lui-même, et l'ensemble vide !
Ces sous-ensembles comportent donc tous de 0 à 10 nombres qui vont de 10 à 99.
La somme est donc comprise entre 0 minimum et 990 maximum.
On range alors chacun de ces sous-ensembles dans 991 tiroirs dont les numéros sont les sommes possibles. On trouve donc deux sous-ensembles dans un même tiroir, donc ayant la même somme.
Si ces deux sous-ensembles ne sont pas disjoints, il suffit de retirer leurs éléments communs.

Principe général des tiroirs, énoncé sans variable :

Quand on range des objets dans les tiroirs d'un meuble, le nombre maximum d'objets qu'on trouve dans un tiroir est supérieur ou égal à la moyenne d'objets par tiroir.

Troisième exemple :

Un jeu de pari sur les résultats de matchs de football vous invite à remplir un carton avec une grille de 13 cases correspondant aux 13 matchs qui seront joués samedi prochain.
Il faut indiquer pour chaque match A contre B, le résultat que vous anticipez : A gagne, B gagne, ou match nul.

Combien de cartons de jeu faut-il remplir et comment faut-il les remplir pour être certain que l'un comporte au moins cinq prévisions exactes ?

Principe général des tiroirs probabiliste :

Si l'on range *uniformément au hasard* k objets dans n tiroirs avec $k < n$, la probabilité que deux objets se retrouvent dans le même tiroir est égale à :

$$P = 1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!} \approx 1 - \exp\left(\frac{k(1-k)}{2n}\right).$$

Preuve :

Il y a n^k rangements possibles, puisqu'il faut choisir l'un des n tiroirs pour chacun des k objets. C'est le nombre d'applications d'un ensemble de k éléments vers un ensemble à n éléments.
Parmi ces rangements équiprobables, le nombre de rangements défavorables correspond au cas où deux objets ne sont jamais dans un même tiroir. C'est le nombre d'injections d'un ensemble de k éléments vers un ensemble à n éléments. C'est aussi le nombre de suite de k éléments différents pris parmi n, connu sous le nom d'arrangements et vaut $\frac{n!}{(n-k)!}$. D'où le résultat.

<u>Remarque</u> :

- Pour obtenir un hasard uniforme, on peut imaginer le tirage avec remise d'une carte au hasard parmi n.
- Même s'il y a moins d'objets que de tiroirs, la rencontre se produit bien plus souvent qu'on ne s'y attendrait à priori.
- On peut ainsi calculer la probabilité que dans une classe de 35 élèves, deux d'entre eux aient le même jour anniversaire.

Quatrième exemple :

Il est certain que deux hommes ont exactement le même nombre de cheveux - :))

Comme une chose vraie dans le fini a généralement un énoncé correspondant dans l'infini, c'est le cas pour le principe des tiroirs.

Principe des tiroirs fini/infini :

Quand on range une infinité d'objets dans un nombre fini de tiroirs, l'un des tiroirs contient une infinité d'objets.

On peut généraliser ce principe à 2 puissance l'infini !
Il suffit de prendre un nombre infini indénombrable d'objets à ranger dans une infinité dénombrable de tiroirs.

S'échapper du damier...

Une fourmi part de la case centrale du damier en avançant chaque seconde d'une case dans la direction de la flèche présente sur la case. La flèche tourne alors d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque la fourmi quitte la case. Si elle arrive sur la case de sortie et que la flèche pointe vers l'extérieur, elle sort. Si elle est bloquée par un mur, elle ne change pas de case, mais la flèche tourne quand même à chaque seconde. Les flèches étant disposées aléatoirement au départ, la fourmi finira toujours par sortir...

Sortie

←	↑	←	↑	↓	→	↓	←	↑	←	←	↓
↑	→	↑	←	↑	←	↓	→	←	←	↑	↑
→	←	←	←	→	↑	↑	→	↑	↓	→	←
→	→	←	←	↓	→	→	↑	→	↓	↑	→
←	→	→	←	→	↓	→	↓	↓	←	→	→
→	↓	←	↑	←	↓	↑	→	→	→	↓	←
→	↑	↑	↑	↓	←	←	←	↑	↑	↓	↓
→	→	↑	←	→	↑	→	↑	↑	→	↓	←
←	→	↓	→	→	→	↓	↓	↑	→	→	↑
↓	↓	←	↑	↑	↓	←	←	→	↑	↑	←

La preuve utilise le principe des tiroirs fini/infini, et un raisonnement par l'absurde intéressant.

Supposons que la fourmi ne sorte jamais du damier fini.
Elle passe donc une infinité de fois sur une case.
Et aussi une infinité de fois sur les cases voisines, et de proche en proche une infinité de fois sur la case de sortie.
La quatrième fois au maximum, elle pourra sortir.
Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de départ que la fourmi ne sorte jamais.
Il est donc impossible que la fourmi ne sorte jamais. Joli non ?

Un algorithme intéressant à programmer ici, avec une interface graphique.

Une autre application possible :

Si A est un ensemble fini, alors une application $f: A \to A$ est injective si et seulement si elle est surjective.

<u>C.N.</u> :

Supposons f non surjective, et soit a un élément de A n'appartenant pas à $f(A)$.
On range chaque élément x de A dans un élément $f(x)$ de $f(A)$ sauf a.
Les éléments x sont les chaussettes et les éléments $f(x)$ les tiroirs.
Comme f est injective, aucun tiroirs ne contient 2 chaussettes.
L'ensemble des tiroirs est donc strictement plus petit que l'ensemble fini des chaussettes, ce qui est impossible.

<u>C.S.</u> :

Supposons f surjective
Alors on peut envisager la fonction $g: A \to A$ qui à tout élément y de A fait correspondre un antécédent de y par f.
C'est-à-dire que $f(g(y)) = y$ et donc $f \circ g = Id_A$, ce qui montre que g est injective, donc surjective d'après ce qui précède.
Donc g est bijective, de bijection réciproque f, donc f est injective.