Quelques résultats d'analyse réelle

Un neo-TeXnicien

19 février 2020

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

1.1 Énoncé général

L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

1.2 Démonstration topologique

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
L'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe.
Ce qui achève la démonstration.

1.3 Énoncé équivalent

Soit une fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

1.4 Énoncé de Bolzano

Si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

1.5 Équivalence entre continuité et valeur intermédiaire

Une fonction peut très bien vérifier la propriété de la valeur intermédiaire sans être continue. Un exemple classique est donné par la fonction f définie par $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = a$ avec $a \in [-1,1]$. Cette fonction n'est pas continue en 0 mais elle vérifie bien la propriété de la valeur intermédiaire

sur tout intervalle.
Darboux a démontré que la conclusion est vérifiée pour les fonctions dérivées, dont font partie les fonctions continues, d'après le théorème fondamental de l'intégration.
Dans le cas d'une fonction monotone, la propriété de la valeur intermédiaire entraîne la continuité.

1.6 Nécessité du corps des réels

Ce théorème est faux sur le corps des nombres rationnels. La fonction $f(x) = x^2 - 2$ définie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ est continue et change de signe entre 0 et 2. Cependant, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution rationnelle.

1.7 Application

Théorème de la bijection :
Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$, alors elle réalise une bijection de I sur $f(I)$ qui est lui-même un intervalle. De plus, la bijection réciproque est également continue.
Preuve :
La monotonie stricte assure que la fonction f est injective, et le T.V.I. qu'elle est surjective.

1.8 Démonstration du théorème

La démonstration complète du théorème des valeurs intermédiaires s'appuie sur l'axiome de la borne supérieure. Démontrons deux lemmes au préalable.

1.8.1 lemme 1

Soit X une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et c sa borne supérieure.
Alors il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers c.
Preuve :
Comme c est la borne supérieure de X il est est le plus petit des majorants.
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tel que : $c - \varepsilon < x \leq c$.
En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in X$ tel que : $c - \frac{1}{n+1} < x_n \leq c$.
La suite (x_n) converge donc vers c par le théorème des gendarmes.

1.8.2 lemme 2

Soit (x_n) une suite réelle qui converge vers ℓ, et f une application à valeurs réelles continue en ℓ. Alors la suite $f(x_n)$ converge vers $f(\ell)$.
Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme f est continue en ℓ :
$\exists \alpha > 0$ tel que : $|x - \ell| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon$.
Comme (x_n) converge vers ℓ, pour ce réel α :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n > n_0 \Longrightarrow |x_n - \ell| < \alpha$.
Par transitivité, on obtient : $n > n_0 \Longrightarrow |f(x_n) - f(\ell)| < \varepsilon$.

1.8.3 démonstration

Dans le cas où $f(a) = f(b)$ on a nécessairement $\lambda = f(a) = f(b)$ donc on peut choisir $c = a$ ou $c = b$. Supposons donc par exemple que $f(a) < f(b)$.
On considère alors l'ensemble $X = \{x \in [a; b] \ / \ f(x) \leq \lambda\}$.
Cet ensemble est non vide car $f(a) \leq \lambda$ et donc $a \in X$.
Cet ensemble est majoré puisqu'il est inclus dans l'intervalle $[a, b]$.
Soit alors c sa borne supérieure.
Montrons que $f(c) \leq \lambda$.
Comme $c = Sup\ X$, d'après le lemme 1 il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers c. Comme les (x_n) sont dans X on a $f(x_n) \leq \lambda$.
Par passage à la limite et d'après le lemme 2, on obtient $f(c) \leq \lambda$.
Montrons que $f(c) \geq \lambda$.
Si $c = b$ alors $f(c) = f(b) \geq \lambda$.
Supposons donc $c < b$.
Comme $c = Sup\ X$, $\forall x \in]c, b]$, $x \notin X$ et donc $f(x) > \lambda$.
On peut alors définir une suite (y_n) d'éléments de $]c, b]$ qui converge vers c, en posant par exemple $y_n = c + \frac{b-c}{n}$. On a alors $f(y_n) > \lambda$, et par passage à la limite, en vertu du lemme 2 on obtient $f(c) \geq \lambda$.
Ce qui prouve que $f(c) = \lambda$.

2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème donne une caractérisation séquentielle des espaces compacts.

2.1 Énoncé

Un espace métrique X est compact au sens de l'axiome de Borel-Lebesgue si toute suite d"éléments de X admet une valeur d'adhérence dans X.

2.2 Remarques

La réciproque est également vérifiée.
Une valeur d'adhérence est un point de X près duquel s'accumulent une infinité de termes de la suite.
Dans un espace où tout point admet une base dénombrable de voisinages (c'est le cas notamment dans un espace métrique, comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) les valeurs d'adhérence d'une suite sont les limites de ses suites extraites.
Dans un espace (non nécessairement métrisable) compact ou même seulement dénombrablement compact, toute suite admet une valeur d'adhérence.

2.3 Énoncé dans le cas réel

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

3 Le théorème des bornes

3.1 Énoncé

On considère une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.
La conclusion et les démonstrations restent inchangées si l'on autorise $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

3.2 Applications

Il est utilisé pour la démonstration du théorème de Rolle, qui permet de démontrer le théorème des accroissements finis, qui à son tour sert à l'analyse en développement limité d'une fonction et au théorème de Taylor.

3.3 Démonstration topologique

Le théorème de Borel-Lebesgue affirme que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.
L'image d'un compact par une application continue dans un espace séparé est un compact.
Donc $f([a, b])$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc un fermé borné.

3.4 Démonstration complète

Notons M la borne supérieure de l'ensemble $f([a,b])$, éventuellement infinie, et prouvons qu'elle est atteinte donc en fait finie.
Par définition de M :
il existe une suite de réels $x_n \in [a,b]$ telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
Comme (x_n) est bornée, elle possède une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans sa version réelle : $x_\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d \in [a,b]$.
Et comme f est continue au point d, on a $f(x_\varphi(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(d)$.
Si bien que $M = f(d)$ par unicité de la limite de $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)$
Donc M est bien une valeur atteinte par f.

4 Le théorème de Rolle

5 Le théorème des accroissements finis

6 Les théorèmes fondamentaux de l'intégration