Corrigé du baccalauréat S Liban 31 mai 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. a.

Solution :

f est dérivable sur $]0\,;\,1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,1]$.

$f = uv^2 \implies f' = u'v^2 + 2uv'v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1 - \ln(x) \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$\forall x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = \left(1 - \ln(x)\right)^2 - 2\left(1 - \ln(x)\right) = \left(1 - \ln(x)\right)\left(1 - \ln(x) - 2\right)$

On a donc bien $\forall x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = \left(\ln(x) + 1\right)\left(\ln(x) - 1\right)$.

b.

Solution :

Sur $]0\,;\,1]$, $\ln(x) < 0$ d'où $\left(\ln(x) - 1\right) < 0$

$f'(x)$ est donc du signe contraire de $\left(\ln(x) + 1\right)$

$\ln(x) + 1 > 0 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$, on en déduit le tableau des variations de f

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	-	
$f(x)$	‖ 0	↗	$4\mathrm{e}^{-1}$	↘	1

2. a.

Solution : $\mathrm{O}N_{0,2} \approx 0{,}5$ et $\mathrm{O}P_{0,2} \approx 2{,}6$

On en déduit que l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ est d'environ $\dfrac{0{,}5 \times 2{,}6}{2} = 0{,}65$ unités d'aire.

b.

Solution : $\forall x \in]0\,;\,1]\, g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$d_{0,2}$ est de coefficient directeur $g'(0{,}2) = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$. On a donc $d_{0,2}\ :\ y = 5x + b$

Or $d_{0,2}$ passe par $M_{0,2}\left(0{,}2\,;\,\ln(0{,}2)\right)$, on en déduit $b = \ln(0{,}2) - 1 = -1 - \ln(5)$

Finalement $d_{0,2}\ :\ y = 5x - \ln(5) - 1$

c.

Solution : $\mathrm{O}P_{0,2} = |\ln(0{,}2) - 1| = 1 + \ln(5)$

$5x + \ln(0{,}2) - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1 + \ln(5)}{5}$ donc $\mathrm{O}N_{0,2} = \dfrac{1 + \ln(5)}{5}$

L'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ est donc $\dfrac{(1 + \ln(5))^2}{10} \approx 0{,}681$ unités d'aire.

3. $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Solution :
On remarque que $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}f(a)$ donc l'aire sera maximale si $f(a)$ est maximale
On en déduit que l'aire est maximale si $a = \mathrm{e}^{-1}$ et on a $\mathscr{A}\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \dfrac{1}{2}f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 2\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}74$ unités d'aire.

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. a.

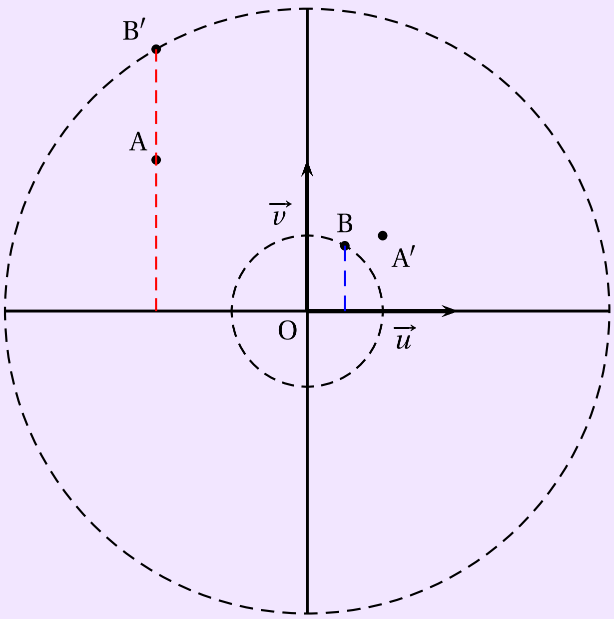
Solution :
$z_{\mathrm{A}'} = -\dfrac{1}{-1+\mathrm{i}} = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

b.

Solution :
$z_{\mathrm{B}'} = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ qui n'est pas l'écriture exponentielle ; or $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$; donc $z_{\mathrm{B}'} = 2 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

c.

Solution :



$z_{\mathrm{A}} = -1+\mathrm{i}$ donc A se place sans problème.

$z_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
donc B se situe sur le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$ à l'intersection de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{4}$ dans le premier cadran.

$z_{\mathrm{A}'} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ donc A′ se place sans problème.

$z_{\mathrm{B}'} = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$
donc B′ se situe sur le cercle de centre O et de rayon 2 à l'intersection de la droite d'équation $x = -1$ dans le deuxième cadran.

2. a.

Solution :
$$\begin{aligned} z' &= -\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \\ &= -\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ &= \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)} \end{aligned}$$

b.

Solution :
Si M, distinct de 0, appartient au disque de centre 0 et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre 0 et de rayon 1, alors O$M < 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{O}M < 1 &\iff |z| < 1 \\ &\iff \left|\frac{1}{z}\right| > 1 \\ &\iff \left|-\frac{1}{z}\right| > 1 \\ &\iff \mathrm{O}M' > 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que l'affirmation est vraie : si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque.

3. a.

Solution : On pose $z = x + \mathrm{i}y$

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} M(z) \in \Gamma &\iff MK^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff |z - z_K|^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff \left|z + \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff \left|x + \frac{1}{2} + \mathrm{i}y\right|^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On a donc bien $\Gamma\ :\ x^2 + x + y^2 = 0$.

Méthode 2 :

$\Gamma\ :\ (x - x_K)^2 + \left(y - y_K\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ or $x_K = \frac{1}{2}$ et $y_K = 0$

Donc $\Gamma\ :\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \iff \Gamma\ :\ x^2 + x + y^2 = 0$.

b.

Solution :
$z' = -\dfrac{1}{x + \mathrm{i}y} = -\dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$

Donc $z' = -\dfrac{x}{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{i}$

c.

Solution :
M un point de Γ, distinct de O alors $x^2 + x + y^2 = 0 \implies \times^2 + y^2 = -x \neq 0$

On en déduit que $Re\left(z'\right) = -\dfrac{x}{x^2 + y^2} = -\dfrac{x}{-x} = 1$

Donc l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1.

Solution :

d est orthogonale à P donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (AC). Donc (BD) est orthogonale (AC).

(AC) est perpendiculaire à (AB) car ABC est rectangle en A.

(AC) est donc orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (AB) du plan (BAD), on en déduit que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

2.

Solution :

d est perpendiculaire à P donc ABD et CBD sont rectangle en B.

ABC est rectangle en A d'après l'énoncé et on a montré dans la question précédente que (AC) est orthogonale au plan (BAD) donc à tout droite de ce plan, donc en particulier (AC) est perpendiculaire à (AD) en A. Le triangle ACD est rectangle comme le triangle ABC.

Finalement, toutes ses faces étant des triangles rectangles, ABCD est bien un bicoin.

3. **a.**

Solution :

[CD] est l'hypoténuse de BCD, donc le côté le plus grand : CD > CB et CD > BD ;

[CD] est l'hypoténuse de de ACD, donc CD > CA, CD > AD.

Or [AD] est l'hypoténuse de ABD donc AD > AB et d'après le résultat précédent CD > AD > AB.

Finalement [CD] est la plus longue arête du bicoin car elle est plus longue que les cinq autres.

b.

Solution :

I milieu de l'hypoténuse de BCD rectangle en D est le centre du cercle circonscrit à BCD on a alors IB = IC = ID.

De même dans ACD rectangle en A, I milieu de l'hypoténuse [CD] est le centre du cercle circonscrit à ACD et on a ID = IC = IA.

Finalement IA = IB = IC = ID, donc I est équidistant des quatre sommets du bicoin ABCD.

Partie B

1.

Solution :

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est directeur de d donc normal à P.

$$\begin{aligned}
M(x\,;\,y\,;\,z)\in P &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0\\
&\iff \begin{pmatrix}x-3\\y-1\\z+5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=0\\
&\iff 2(x-3)-2(y-1)+z+5=0
\end{aligned}$$

Finalement on a $P\,:\,2x-2y+z+1=0$

2.

Solution :
En posant $t = 2$ dans la représentation paramétrique de d on obtient les coordonnées de B donc $\mathrm{B} \in d$.
$2x_\mathrm{B} - 2y_\mathrm{B} + z_\mathrm{B} + 1 = 10 - 10 - 1 + 1 = 0$ donc $\mathrm{B} \in P$.
Finalement d perce bien P en B

3.

Solution :
$2x_\mathrm{C} - 2y_\mathrm{C} + z_\mathrm{C} + 1 = 14 - 6 - 9 + 1 = 0$ donc $C \in P$.
$\mathrm{AC}^2 = 4^2 + 2^2 + (-4)^2 = 36$, $\mathrm{AB}^2 = 2^2 + 4^2 + 4^2 = 36$ et $\mathrm{BC}^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-8)^2 = 72$
On a alors $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2$ donc ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

4. **a.**

Solution :
$M \in d$ et $\mathrm{B} \in d$ donc $d = (M\mathrm{B})$.
De plus B et A sont deux points distincts de P donc $(\mathrm{AB}) \subset P$ et on sait que d est perpendiculaire à P donc orthogonale à toute droite de P. On en déduit que $(M\mathrm{B})$ est perpendiculaire à (AB).
Finalement on a donc bien ABM rectangle en B

b.

Solution :
ABM est isocèle en B si et seulement si BM =AB

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}M = \mathrm{AB} &\iff \mathrm{B}M^2 = \mathrm{AB}^2\\
&\iff (2t-4)^2 + (-2t+4)^2 + (t-2)^2 = 36\\
&\iff 4t^2 - 16t + 16 + 4t^2 - 16t + 16 + t^2 - 4t + 4 = 36\\
&\iff 9t^2 - 36t = 0\\
&\iff t^2 - 4t = 0
\end{aligned}$$

c.

Solution :

$$t^2 - 4t = 0 \iff t(t-4) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ t = 4 \end{cases}$$

Donc $M_1(1\,;\,9\,;\,-3)$ et $M_2(9\,;\,1\,;\,1)$ sont les points de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

Solution : ABCD est un bicoin car ABC est rectangle en B (voir question **3.**) et D est un point de la perpendiculaire au plan (ABC) passant par B.

D'après la question **3.b.** de la **Partie A**, on sait alors que le milieu I de [CD] est équidistant des quatre sommets du bicoin.

Le centre de la sphère circonscrite à ABCD est donc $\mathrm{I}(8\,;\,2\,;\,-4)$ milieu de [CD].

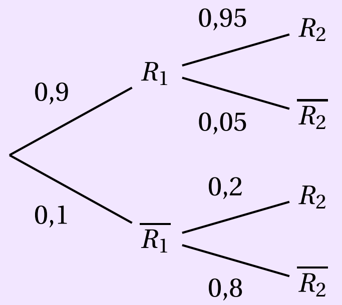
Le rayon de la sphère est IC= $\sqrt{(x_\mathrm{C} - x_\mathrm{I})^2 + \left(y_\mathrm{C} - y_\mathrm{I}\right)^2 + (z_\mathrm{C} - z_\mathrm{I})^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.**

Solution : L'énoncé donne $p\left(R_1\right) = 0{,}9$, $p_{R_1}\left(R_2\right) = 0{,}95$ et $p_{\overline{R_1}}\left(R_2\right) = 0{,}2$.



b.

Solution : On cherche $p\left(R_1 \cap R_2\right)$

$p\left(R_1 \cap R_2\right) = p\left(R_1\right) \times p_{R_1}\left(R_2\right) = 0{,}9 \times 0{,}95 = 0{,}855$

c.

Solution : On cherche $p\left(R_2\right)$

R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p\left(R_2\right) &= p\left(R_1 \cap R_2\right) + p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) \\ &= 0{,}855 + p\left(\overline{R_1}\right) \times p_{\overline{R_1}}\left(R_2\right) \\ &= 0{,}855 + 0{,}1 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}875 \end{aligned}$$

d.

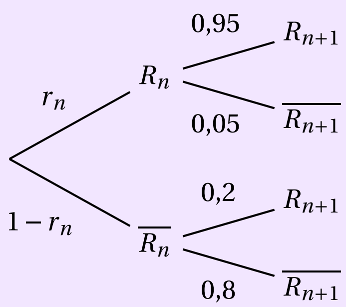
Solution : On cherche $p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right)$

$$p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)}{p\left(R_2\right)}$$

$$p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{0{,}02}{0{,}875} = \frac{4}{175} \approx 0{,}023$$

2. **a.**

Solution :



b.

Solution :
R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p\left(R_{n+1}\right) \\ &= p\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\ &= p_{R_n}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(R_n\right) + p_{\overline{R_n}}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(\overline{R_n}\right) \\ &= 0{,}95 r_n + 0{,}2\left(1 - r_n\right) \\ &= 0{,}75 r_n + 0{,}2 \end{aligned}$$

c.

Solution : On procède par récurrence

Initialisation : $r_1 = p\left(R_1\right) = 0{,}9$ et $0{,}1 \times 0{,}75^0 + 0{,}8 = 0{,}9$

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel que $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 0{,}75 r_n + 0{,}2 \text{ d'après la question précédente} \\ &= 0{,}75\left(0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8\right) + 0{,}2 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 0{,}1 \times 0{,}75^n + 0{,}6 + 0{,}2 \\ &= 0{,}1 \times 0{,}75^n + 0{,}8 \end{aligned}$$

On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang 1 or elle est vérifiée à ce même rang.
Par le principe de récurrence on peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$

d.

Solution :
$|0{,}75| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^{n-1} = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0{,}8$
On en déduit qu'avec le temps, la probabilité pour un client de rendre la bouteille se stabilise à 0,8

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.

Solution :
D'après l'énoncé, on a

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{3}{4} b_n + 2 \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4} b_n + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}5 a_n + 0{,}75 b_n + 2 \\ b_{n+1} = 0{,}25 b_n + 3 \end{cases}$$

Ce système se traduit par $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. **a.**

Solution :
$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ avec I_2 la matrice identité d'ordre 2.

On en déduit que P est inversible et $P^{-1} = P$

b.

Solution :
$$PMP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Donc $PMP = D$ avec D la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

c.

Solution :
$PDP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} = M$

d.

Solution :
Initialisation : $M^0 = I_2$ et $PD^0P = PI_2P = P^2 = P$ d'après la question **2.a.**

Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $M^n = PD^nP$

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= PD^nP \times M \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nP \times PDP \text{ d'après la question précédente} \\ &= PD^nI_2DP \text{ d'après la question } \mathbf{2.a.} \\ &= PD^{n+1}P \end{aligned}$$

On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée à ce même rang.
Par le principe de récurrence on peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP$

3.

Solution :

$$\begin{aligned} MX + C &= \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc bien $X = MX + C$

4. a.

Solution :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} &= U_{n+1} - X \\ &= MU_n + C - X \text{ d'après la question } \mathbf{1.} \\ &= MU_n - MX \text{ d'après la question } \mathbf{3.} \\ &= M(U_n - X) \\ &= MV_n \end{aligned}$$

b.

Solution :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - X \iff U_n = V_n + X$

$$\begin{aligned} U_n &= V_n + X \\ &= M^nV_0 + X \quad \text{avec } V_0 = U_0 - X = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 3 \times 0{,}5^n - 3 \times 0{,}25^n \\ 0 & 0{,}25^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18 \times 0{,}5^n + 9 \times 0{,}25^n + 10 \\ -3 \times 0{,}25^n + 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. a.

Solution :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = -3\times 0{,}25^n + 4$ donc $b_{n+1} - b_n = -3\times 0{,}25^{n+1} + 3\times 0{,}25^n = 3\times 0{,}25^n(1-0{,}25) = 9\times 0{,}25^{n+1} > 0$

On en déduit que (b_n) est croissante.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 - 3\times 0{,}25^n < 4$ donc (b_n) est majorée par 4.

$|0{,}25| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}25^n = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 4$.

b.

Solution :
$|0{,}25| < 1$ et $|0{,}5| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}25^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 10$

c.

Solution :
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 10$ et (a_n) est croissante donc elle est majorée par 10. On sait d'autre part que (b_n) est majorée par 4.

Finalement il suffit de prévoir une contenance de 1 000 litres pour le bassin A et 400 litres pour le bassin B.