Correction partielle

Exercice n°14 :

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.
2. **a.** Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires (dans le plan (BCG))... d'où les constructions de T et Q.

   b. L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est une droite.
   Plusieurs manières de faire cette construction :
   - On peut construire 2 points de la droite intersection :
     Q est un point de l'intersection des plans (MNP) (car appartient à (LN), où L et N sont dans (MNP)) et (ABF) (car appartient à (BF)).
     Dans le plan (EFG), les droites (MP) et (EF) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point R qui est aussi un point de l'intersection des plans (MNP) (car sur (MP)) et (ABF) (car sur (EF)).
     L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite (RQ)
   - On peut utiliser un point et la direction
     On a déjà vu que Q est un point de la droite cherchée.
     Les deux plans (ABF) et (CDG) sont parallèles, ils sont donc coupés par le plan (MNP) selon deux droites parallèles. Or, les points P et T sont à la fois dans (MNP) et (CDG), donc l'intersection de ces deux plans est (PT).
     L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite parallèle à (PT) passant par Q.
3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).
   La section du cube par le plan (MNP) est le polygone MPTQS.

Partie B

1. $M\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$, $N\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $P\left(\dfrac{1}{4}\,;\,1\,;\,1\right)$.
2. L est le point d'intersection de (MP) et (FG). On cherche donc une représentation paramétrique de chacune des deux droites (MP) et (FG).
   (MP) passe par $M\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}t \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t \\ z=1 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$

   (FG) passe par F (1 ; 0 ; 1) et a pour vecteur directeur $\vec{v}$ (0 ; 1 ; 0), une représentation paramétrique de cette droite est donc :
   $\begin{cases} x=1 \\ y=t' \\ z=1 \end{cases}$ où $t'\in\mathbb{R}$

   $$L\in(MP)\cap(FG) \iff \begin{cases} x=\dfrac{1}{4}t \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t \\ z=1 \\ x=1 \\ y=t' \\ z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1=\dfrac{1}{4}t \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t \\ z=1 \\ x=1 \\ y=t' \end{cases} \iff \begin{cases} 4=t \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times 4 \\ z=1 \\ x=1 \\ y=t' \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=1 \\ t=4 \\ t'=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

   Les coordonnées du point L sont $\left(1\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,1\right)$.

3) Pour cette question, ne disposant pas encore du produit scalaire, nous sommes obligés de calculer TP^2, TN^2 et PN^2 pour vérifier si le triangle TPN est rectangle avec l'égalité de Pythagore.

Lorsque nous disposerons du produit scalaire, nous pourrons aller plus vite en faisant :

3. $\overrightarrow{TP}\left(-\frac{3}{4}\,;0\,;\frac{3}{8}\right)$ et $\overrightarrow{TN}\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{8}\right)$.
Le repère étant orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire :
$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TN} = -\frac{3}{8}\times\frac{1}{8} \neq 0$
Le triangle TPN n'est donc pas rectangle en T.

Intervalle du paramètre pour une demi-droite

On considère deux points connus A et B de l'espace.
Donnons des représentations paramétriques de (AB), $[AB)$, $[BA)$ et $[AB]$.

Première méthode :

On écrit qu'un point $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace appartient à la demi-droite (AB) si et seulement si $M = A + t\times\overrightarrow{AB}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et donc $t\in\left]-\infty\,;+\infty\right[$.

D'où la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_A + t\times u_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t\times y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + t\times z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$.

Pour les demi-droites :

On écrit qu'un point $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace appartient à la demi-droite $[AB)$ si et seulement si $M = A + t\times\overrightarrow{AB}$ avec $t \geqslant 0$ et donc $t\in\left[0\,;+\infty\right[$.

De même, un point $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace appartient à la demi-droite $[BA)$ si et seulement si $M = A + t\times\overrightarrow{AB}$ avec $t \leqslant 0$ et donc $t\in\left]-\infty\,;0\right]$.

Pour le segment :

On écrit qu'un point $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $M = A + t\times\overrightarrow{AB}$ avec $0\leqslant t\leqslant 1$ et donc $t\in\left[0\,;1\right]$.

Deuxième méthode :

On part d'une représentation paramétrique de droite : $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+5t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

Montrons que les points $A(-3;3;-8)$ et $B(-7;5;-18)$ suivants appartiennent bien à cette droite, puis donnons les représentations paramétriques de $[AB)$, $[BA)$ et $[AB]$.

Pour A : $x=-3=-1+2t$ donne $t=-1$ et on obtient bien $y=3$ et $z=-8$ avec $t=-1$
Pour B : $x=-7=-1+2t$ donne $t=-3$ et on obtient bien $y=5$ et $z=-18$ avec $t=-3$

La demi-droite $[AB)$ correspond donc à la représentation paramétrique avec $t\in\left]-\infty\,;-1\right]$.

La demi-droite $[BA)$ correspond à la représentation paramétrique avec $t\in\left]-3\,;+\infty\right]$.

Et la demi-droite $[AB]$ correspond à la représentation paramétrique avec $t\in\left]-3\,;-1\right]$.

Exercice n°10 :

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-8\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car la deuxième coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ n'est pas nulle.

Donc les trois points A , B et C définissent bien un plan car ils ne sont pas alignés.

2) Un point $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels u et v tels que $M=A+u\times\overrightarrow{AB}+v\times\overrightarrow{AC}$ ce qui donne la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x=-1+2u+v \\ y=2-2u \\ z=5-7u-8v \end{cases} \quad \text{où } u,v\in\mathbb{R}\,.$$

3) a) Pour montrer que le plan (ABC) n'est pas parallèle au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, il faudrait normalement montrer que l'un des vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$ de ce plan n'est pas coplanaires avec les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, donc que le système $\overrightarrow{AB}=\alpha\,\vec{i}+\beta\,\vec{j}$ n'admet pas de solution par exemple.

Mais ici ce n'est pas nécessaire, car si ces deux plans étaient parallèles, tous les vecteurs du plan (ABC) devraient être horizontaux, avec une cote $z=0$, comme dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, ce qui n'est manifestement pas le cas des deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Donc ces deux plans sont bien sécants.

b) En partant de la représentation paramétrique du plan (ABC) et en imposant $z=0$ pour être dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on peut exprimer l'un des paramètres u ou v en fonction de l'autre.

$$z=5-7u-8v=0 \text{ donne } v=\frac{5-7u}{8} \text{ et donc } x=-1+2u+v=\frac{9u-3}{8}$$

La représentation paramétrique de la droite intersection est donc :

$$\begin{cases} x=-\dfrac{3}{8}+\dfrac{9}{8}u \\ y=2-2u \\ z=0 \end{cases} \text{ où } u\in\mathbb{R} .$$

L'intersection de deux plans sera au programme du dernier chapitre sur la géométrie dans l'espace.