Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

La continuité d'une fonction est avant tout une notion locale : on regarde se qui se passe en un point du domaine de définition d'une fonction, puis on regarde si tout se passe de la même manière pour les autres points du domaine.

1) Continuité d'une fonction :

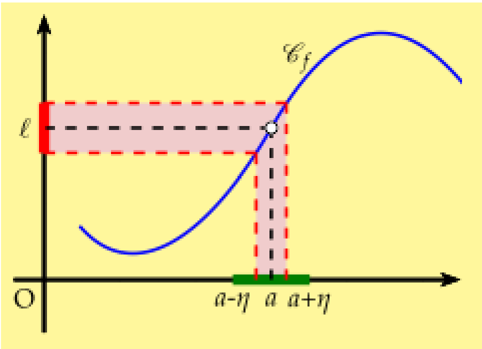
a) Limite finie en un point :

Définition :

Une fonction f admet une limite l (finie) en a si toutes les images $f(x)$ sont aussi proche que l'on veut de l dès que x est suffisamment proche de a.

On a alors le droit d'écrire et d'utiliser le nombre réel $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in]a-\eta\,;a+\eta[$ alors $f(x) \in]l-\varepsilon\,;l+\varepsilon[$.



Remarque :

Si une fonction f admet une limite à droite en a : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_1$ et une limite à gauche en a $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_2$ qui sont différentes, elle n'admet pas de limite en a au sens de cette définition.

<u>Exemple</u> : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2+5x-2}{x-1} & si \;\; x<1 \\ \dfrac{-2x^2-x+3}{1-x} & si \;\; x \geqslant 1 \end{cases}$.

Cette fonction admet-elle une limite en 1 ?

b) Continuité en un point et sur un intervalle :

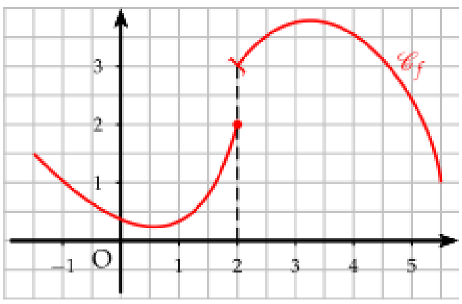
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.

On dit que f est **continue** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

f est dite **continue sur un intervalle** I si f est continue en tout point de I.

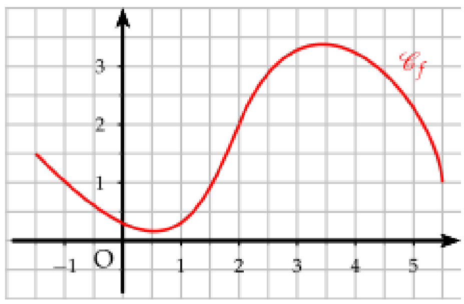
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Remarque : Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.



Fonction f discontinue en 2

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



Fonction f continue sur $[-1,5 ; 5,5]$

La fonction de gauche représente une discontinuité par "saut". C'est le cas par exemple de la fonction partie entière ou plus pratiquement de la fonction qui représente les tarifs postaux en fonction du poids (brusque changement de tarif entre les lettres en dessous de 20 g et de celles entre 20 g et 50 g).

<u>Application au passage à la limite dans les fonctions</u> :

Si une fonction f est continue en a et qu'une suite (u_n) converge vers le réel a,

alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers le réel $f(a)$.

Cela revient à dire qu'on a le droit de passer à la limite dans la fonction :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(a).$$

Exemples :

i) La **fonction partie entière** n'est continue en aucun entier : elle se note $\mathrm{E}(x)$.

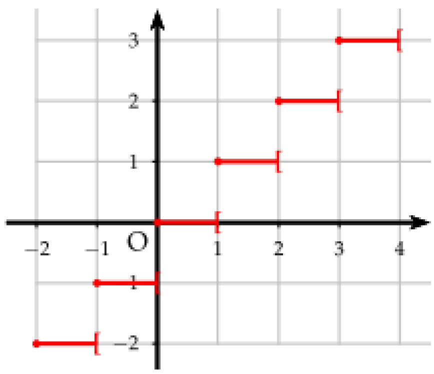
> La partie entière d'un réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
> Mathématiquement cela s'écrit :
>
> $$n = \mathrm{E}(x) \text{ si et seulement si } n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leqslant x < n+1$$

Ainsi $\mathrm{E}(2)=2$, $\mathrm{E}(-5)=-5$, $\mathrm{E}(3{,}7)=3$ et $\mathrm{E}(-0{,}3)=-1$.

Il ne faut donc pas confondre la fonction mathématique partie entière (souvent utile) avec la troncature à l'unité d'un nombre en écriture décimale, qu'on appelle partie entière aussi !

La courbe de la fonction x E(x) présente un saut à chaque nombre entier n.

On n'a pas $\lim\limits_{x \to n} \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(n)$, qui vaut n.



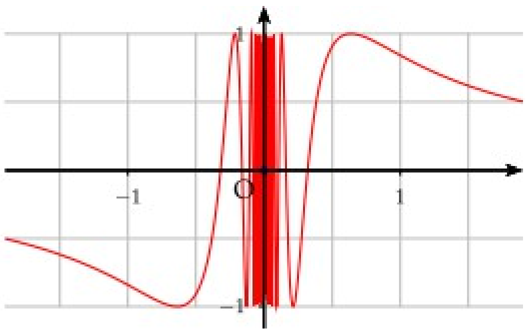
Par contre la fonction est continue à droite en n :

On a bien $\lim\limits_{x \to n+} \mathrm{E}(x) = n$ quand x se rapproche du nombre entier n par la droite (valeurs supérieurs).

Mais elle n'est pas continue à gauche en n :

Par exemple, $\lim\limits_{x \to 2-} \mathrm{E}(x) = 1 \neq \mathrm{E}(2)$ puisque $\mathrm{E}(2) = 2$.

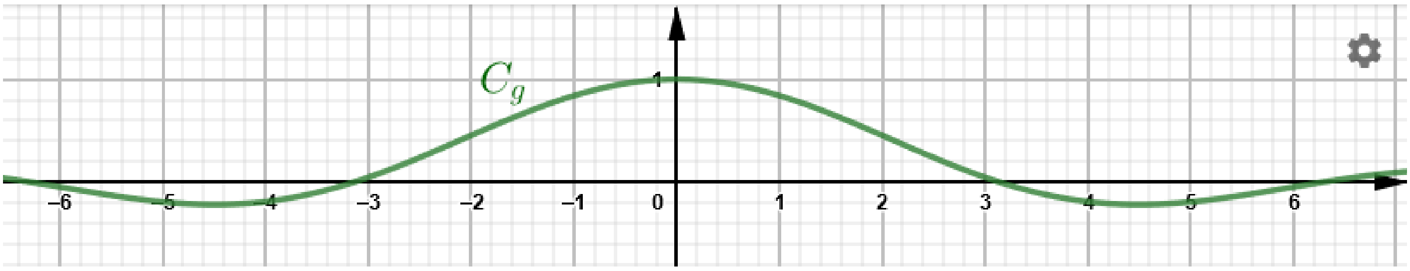
ii) La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 & sinon \end{cases}$ n'est pas continue en 0.



La courbe oscille tellement autour de 0 que l'on ne peut pas en donner une véritable limite.

Ici, il n'y a pas de saut de la courbe.

iii) La fonction définie par $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ n'est à priori pas définie en 0, donc elle ne devrait pas être continue en 0. Pourtant, si l'on affiche sa courbe représentative on observe cela :



Il n'y a ni saut ni oscillations. Cette courbe reflète une fonction parfaitement continue en 0.

En réalité, on peut démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \right) = 1$, si bien qu'on peut prolonger cette fonction par continuité, si bien que la nouvelle fonction h définie cette fois sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$ est elle bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

c) Continuité des fonctions usuelles :

Les fonctions du programme sont la plupart du temps continues partout où elle sont définies. Les valeurs interdites correspondent à des limites infinies, donc en ces points les fonctions ne sont pas continues, car la limite n'existe pas.

Les règles suivantes permettent de justifier la plupart des cas :

Les fonctions polynômes (et donc toutes les fonctions puissances) sont continues sur $\mathbb{R}$.

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction inverse est continue sur $]-\infty\,;0[$ et continue sur $]0\,;+\infty[$.

Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Les combinaisons simples de fonctions continues sont encore des fonctions continuent en général : addition, multiplication, composition et voir pour la division.

d) Dérivabilité et continuité :

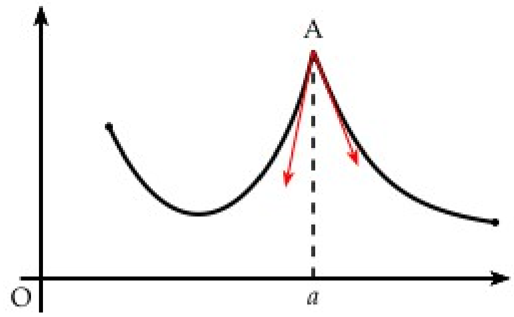
Théorème admis :

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Si f est dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I.

Remarque :

La réciproque de cette propriété est fausse.
Ce qui signifie que la dérivabilité est une hypothèse plus forte que la continuité sur la régularité de la fonction.



Non seulement la courbe de la fonction peut se tracer sans lever le crayon, mais en plus il n'y a pas de point anguleux sur ce tracé, ni de verticalité !

2) Applications de la continuité :

a) Théorème du point fixe :

Théorème admis : Soit (u_n) une suite définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers une limite finie l
Si la fonction f est continue en l

alors l est un point fixe de la fonction f,
c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$.

preuve : On sait que : $u_{n+1} = f(u_n)$, que $(u_n) \to l$ et que f est continue en l.

Comme $(u_n) \to l$, alors on a aussi $u_{n+1} \to l$.

Comme f est continue en l, alors $f(x) \to f(l)$ quand $x \to l$,
donc $f(u_n) \to f(l)$ quand $u_n \to l$.

Finalement on doit nécessairement avoir $l = f(l)$, qui est un point fixe de f.

Exercice : On donne $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$.

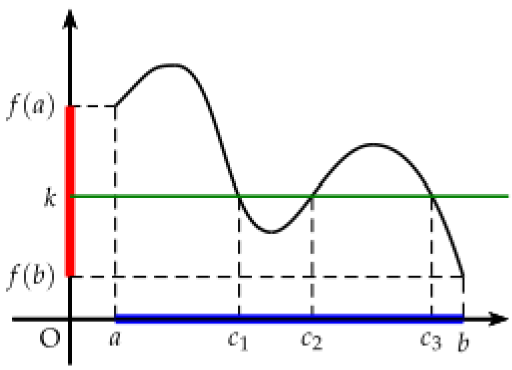
Démontrer que la suite (u_n) converge puis déterminer sa limite.

b) Continuité et équations :

Théorème des valeurs intermédiaires : Existence des solutions. (T.V.I.)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$.

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe un réel $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = k$.



Théorème des valeurs intermédiaires : Unicité de la solution. (T.V.I.)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$.

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe un et un seul réel $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = k$.

Théorème des valeurs intermédiaires : Recherche des zéros d'une fonction. (T.V.I.)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$.

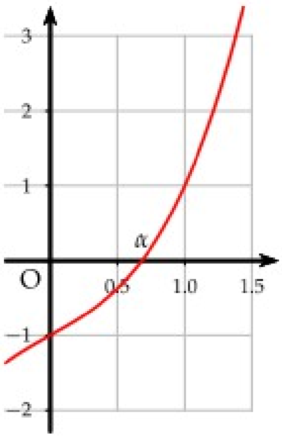
Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur I.

Exemple : L'équation $-2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

- La condition $f(a)\times f(b)<0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe.
- Dans un tableau de variation, les flèches indiquent la continuité et la stricte monotonie.
- Ce théorème se généralise si f est continue sur un intervalle ouvert du type $]a\,;b[$, ou un intervalle non borné, du type $[a\,;+\infty[$. Il suffit de regarder les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3+x-1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution sur $\mathbb{R}$. On donnera un encadrement à l'unité de cette solution. Trouver ensuite, à l'aide d'un algorithme un encadrement à 10^{-6} de cette solution.



La fonction f est une fonction **continue** sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

La fonction f est la somme de deux fonctions croissantes $x\mapsto x^3$ et $x\mapsto x-1$, donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

On a $f(0)=-1$ et $f(1)=1 \Rightarrow f(0)\times f(1)<0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f admet un unique $\alpha\in[0,1]$ tel que $f(\alpha)=0$.

<u>Algorithme de dichotomie</u> :

On cherche à résoudre une équation du type $f(x)=k$ que l'on transforme sous la forme d'une équation $g(x)=0$.

On sait qu'il existe une **unique** solution α entre a et b grâce à un tableau de variation, et l'on cherche à obtenir une valeur approchée de cette solution à 10^{-p} près.
L'entier p est appelé la précision de la valeur approchée.

On entre les bornes a et b ainsi que la fonction f ,dans le programme au préalable.

n ← 0
tant que $\lvert b-a\rvert>10^{-p}$ faire :
    n ← n + 1
    $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
    si $f(a)\times f(m)>0$:
        a ← m
    sinon :
        b ← m
    fin du si
afficher a, b et n
	Qu'obtient-on pour a et b avec une précision de 6 chiffres après la virgule dans l'exemple précédent ?