Complément sur la dérivation.

1) Nombre dérivé et tangentes :

a) Droites :

- l'équation d'une droite verticale est de la forme : $x = cste$;
- l'équation **réduite** d'une droite non verticale est de la forme :

$$(d) : y = mx + p \text{, qui a pour vecteur directeur } \vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}.$$

- l'équation cartésienne **générale** d'une droite est de la forme :

$$(d) : ax + by + c = 0 \text{, qui a pour vecteur directeur } \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}.$$

Sur une droite, l'accroissement des ordonnées, $\Delta y = y_2 - y_1$, est proportionnel à l'accroissement des abscisses, $\Delta x = x_2 - x_2$, et le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur de la droite.

On écrit symboliquement $\Delta y = m \times \Delta x$, ce qui s'écrit aussi : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

- <u>Équation réduite d'une droite</u> passant par $A(x_A ; y_A)$ et de coefficient directeur m :

Sur cette droite, le taux d'accroissement est égal à m, donc pour tout point $M(x ; y)$ de la droite, on a :

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = cste = m \text{ , ce qui donne : } y - y_A = m(x - x_A).$$

<u>Exemples</u> :

i) droite passant par $B(2 ; -5)$ et de coefficient directeur $m = -3$

ii) droite passant par $C(-1 ; 4)$ et $B(3 ; -2)$

Exercices :

- lecture d'équations de droites tracées ;

- tracer des droites d'équations données.

b) Nombre dérivé de f en a :

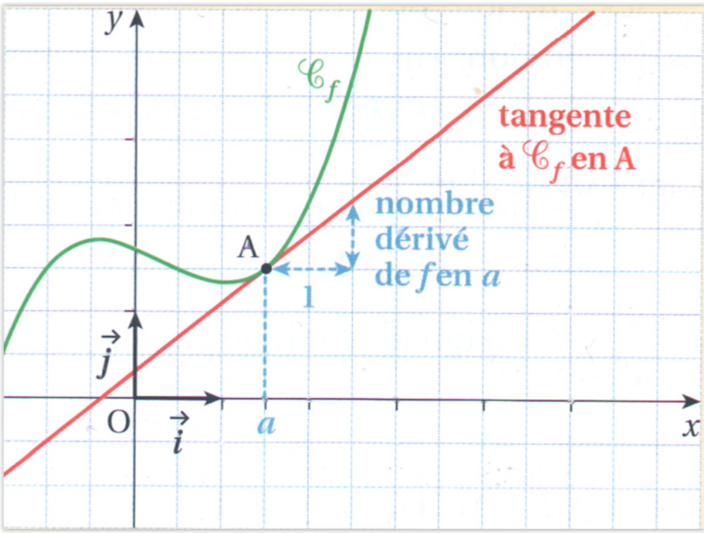
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative C_f est la courbe d'équation $y = f(x)$.

Définition 1 : Soit $a \in I$ un nombre de l'intervalle de définition de f.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si sa courbe C_f admet une unique tangente non verticale en son point d'abscisse a.

Le coefficient directeur de cette tangente est un nombre réel, appelé nombre dérivé de f en a, et noté $f'(a)$, car il dépend de a, et bien sûr de la fonction f.



<u>Équation de la tangente à C_f au point d'abscisse</u> $x = a$:

Cette tangente est la droite passant par le point $A(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Donc pour tout point $M(x ; y)$ de la tangente T_a, on a :

$f'(a) = \dfrac{y - f(a)}{x - a}$, ce qui donne $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, ou encore :

$$T_a : \quad y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Exemples :

- déterminer l'équation des tangentes en 2 points distincts pour une fonction affine ;

- déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_g d'équation $y = x\sqrt{x}$ au point $x = 3$.

c) Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs :

Le **taux de variation** d'une fonction entre deux variables x_1 et x_2 est le rapport :

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$ (ou taux d'accroissement).

On peut l'appeler taux d'accroissement ou taux de variation de f entre x_1 et x_2.

Graphiquement, ce taux de variation est le coefficient directeur de la droite $(M_1 M_2)$, où M_1 et M_2 sont les points d'abscisses x_1 et x_2 de la courbe C_f.

figure illustrative simple...

Exercices :

Déterminer quelques taux de variation pour deux ou trois fonctions données, et comparer les évolutions relatives entre les fonctions.

d) Synthèse : taux de variation, tangente et nombre dérivé :

On pourrait définir intuitivement la tangente à une courbe de la manière suivante :

La tangente à la courbe C_f au point A est la droite n'ayant qu'un seul point d'intersection avec la courbe au voisinage du point A. C'est donc la droite la plus proche de la courbe C_f au voisinage très proche du point A.

Considérons alors la droite T_A, la tangente à la courbe C_f au point $A(a\,;f(a))$.

Pour obtenir cette droite, on commence par construire la droite qui passe par A et un autre point M de la courbe assez proche de A.

Ainsi le point M sera un point de la courbe C_f un peu à droite ou un peu à gauche du point A.

On peut écrire l'abscisse du point M sous la forme $x_M = a+h$, où h est un nombre réel positif ou négatif assez petit, mais pas nul !

Le coefficient directeur de la droite (AM) est le taux de variation de la fonction f entre les points d'abscisses a et $a+h$:

On a : $\mathrm{T}_a(h) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$ et donc $\mathrm{T}_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Et lorsque h tend vers 0, la droite (AM) se rapproche de la tangente T_a qui a pour coefficient directeur $f'(a)$, et donc le taux de variation $\mathrm{T}_a(h)$ a pour limite $f'(a)$ quand $h \to 0$.

D'où la définition rigoureuse suivante du nombre dérivé $f'(a)$.

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in \mathrm{I}$.

On dit que $\boldsymbol{f}$ **est dérivable en** $\boldsymbol{a}$ si et seulement si :

- le taux de variation $\mathrm{T}_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ possède une limite réelle ;
- on note alors $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, **le nombre dérivé de** $\boldsymbol{f}$ **en** $\boldsymbol{a}$.

Pour exister, cette limite doit être **finie**, et si elle existe alors elle est **unique**.

Exemples :

i) Montrer que $f(x)=\sqrt{x-3}$ n'est pas dérivable au point d'abscisse $a=3$.
Limite à droite du taux de variation, figure.

ii) Exemple d'une fonction définie par morceaux (parabole + droite). La faire tracer, déterminer les limites à droite et à gauche, tracer les demi-tangentes.

Remarque : Si a est une des extrémités de l'intervalle de définition I de la fonction f.
Avec $\mathrm{I}=[a;+\infty[$ par exemple.

On dit alors que f est dérivable en a si f est dérivable à droite de a, c'est-à-dire si le nombre $f'_d(a)=\lim\limits_{h\to 0^+} \mathrm{T}_a(h)$ existe. On pose alors : $f'(a)=f'_d(a)$.

2) Fonction dérivée :

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est dérivable sur une partie J de l'intervalle I si et seulement si le nombre $f'(x)$ existe pour tout $x\in\mathrm{J}$.

On note alors f' la fonction dérivée de f, qui est définie sur J par :

$$f' \;:\; \begin{array}{l} \mathrm{J}\to\mathbb{R} \\ x\to f'(x) \textit{ nombre dérivé de } f \textit{ en } x \end{array}.$$

Remarque : On a alors : $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ou encore $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exercices :

- $g(x)=ax^2+bx+c$ et déterminer l'expression de $g'(a)$.

- $h(x)=\sqrt{x}$ ou $k(x)=x^n$ avec $n\geqslant 1$, et déterminer l'expression de $h'(a)$ et $k'(x)$.

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$.

- f est strictement décroissante sur J si et seulement $f'(x)<0 \quad \forall x\in\mathrm{J}$;
- f est constante sur J si et seulement $f'(x)=0 \quad \forall x\in\mathrm{J}$;
- f est strictement croissante sur J si et seulement $f'(x)>0 \quad \forall x\in\mathrm{J}$.

Remarque : ces propriétés sont des conséquences de l'inégalité des accroissements finis ainsi que de l'égalité elle-même.

Exercice :

1) Étudier les variations de la fonction d'expression $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+1$.

2) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ et préciser un intervalle.

3) Valeurs approchées à la calculatrice.

4) Pouvez-vous donner une fonction dont f serait la dérivée ?

3) Formules de dérivation : (Exercices pages 122 et 123)

Nom des fonctions	Expression algébrique	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Fonction constante	$f(x)=k$, où $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
Fonction identité	$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$
Fonction carrée	$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
Fonction puissance	$f(x)=x^n$ où $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
Fonction inverse	$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée	$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarques :

- Les fonctions polynômes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles, quotient de deux polynômes, sont définies partout où le dénominateur ne s'annule pas. Elles sont alors dérivables sur le même ensemble.
- Les fonctions homographiques, quotient de deux fonctions affines, sont donc dérivables sur leur domaine de définition.
- $\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ s'écrit aussi $\mathbb{R}-\{0\}$ Puis $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$ et $\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$.

Plan d'étude d'une fonction f :

1- Domaine de définition D_f à rechercher.

2- Domaine de dérivabilité $D_{f'}$, le domaine de définition de la fonction dérivée f'.

3- Expression de $f'(x)$ en utilisant les formules de dérivation avec vos notations.

4- Étude du signe de $f'(x)$, souvent à l'aide d'un tableau de signes.

Cela peut nécessiter une factorisation de la dérivée avant de pouvoir répondre.
Parfois cette factorisation est évidente ou assez simple, mais parfois plus subtile.
Il est donc important de bien connaître les techniques de factorisation, ne serait-ce que pour voir que l'on peut factoriser.
C'est à cette étape qu'il faut être très rigoureux dans les calculs et le raisonnement.

5- Synthèse des résultats dans le tableau de variation de la fonction.
6- Calculs des valeurs à mettre au bout des flèches, limites aux bornes du domaine.

Soient u, v et f des fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonctions composées	**Domaine de définition et de dérivabilité**
$(u+v)'=u'+v'$	Définie et dérivable partout où u et v sont définies et dérivables.
$(uv)'=u'v+uv'$	
$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$	Définie partout où u est définie et ne s'annule pas ; Dérivable partout où u est dérivable et ne s'annule pas.
$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	Définie partout où $u(x)\geqslant 0$, et dérivable partout où $u(x)>0$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	Définie partout où u et v sont définies, et v ne s'annule pas Dérivable où u et v sont dérivables et v ne s'annule pas.
$(u^n)'=n\,u'\,u^{n-1}$ où $n\in\mathbb{Z}^*$	Définie et dérivable partout où u est définie et dérivable, mais en plus où u ne s'annule pas si $n\leqslant -1$.
$(f(u))'=u'(x)\times f'(u)$	Définie et dérivable où u et f sont définies et dérivables.

Exercices : Étudier les fonctions suivantes.

1) Soit f définie par $f(x)=\sqrt{3x^2-3x-18}$.

2) Soit g définie par $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{12+3x}$.

3) Soit h définie par $h(x)=\dfrac{1}{(-3x^2-3x+18)^3}$.

4) $k(x)=\dfrac{-2}{(7-5x)^2}$.

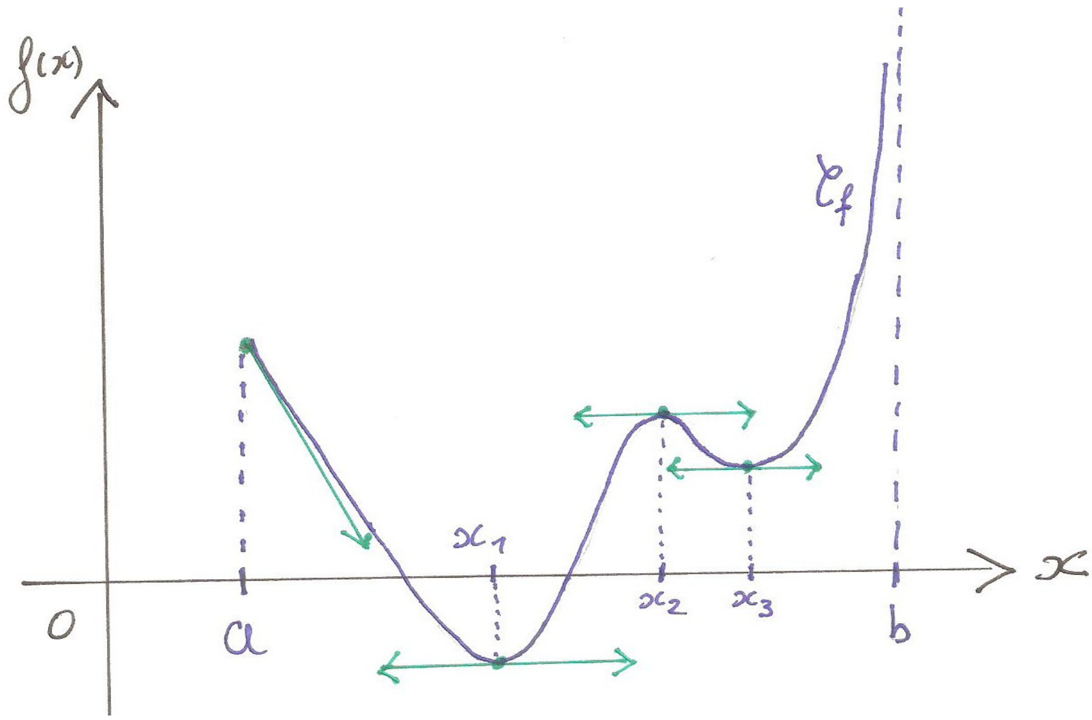
5) Soit f définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{5x-20}{3-2x}}$.

6) Soit g définie par $g(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-3}{4-5\sqrt{x}}$.

4) Recherche d'extremums :

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a;b]$.

Où peut-il y avoir des extremums le long de la courbe de cette fonction f ?



Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle compact $[a;b]$.

- f admet un extremum en $\alpha \in]a;b[$ si et si et ssi $f'(x)$ s'annule en α en changeant de signe.

- aux extrémités a et b de l'intervalle, tout peut arriver ! (y faire une étude particulière)

<u>Méthode de recherche d'extremums</u> :

- On recherche les extremums parmi les solutions de l'équation $f'(x)=0$;
- Puis on regarde ces solutions pour éliminer celles qui ne conviendraient pas : point d'inflexion car la dérivée ne change pas de signe ;
- Enfin on n'oublie pas de regarder ce qui se passe aux bornes de l'intervalle de définition.
- Puis on regarde si les extremums obtenus sont locaux ou globaux.

Exercice : Donner les extremums de la fonction $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-10x^2-12x+3$.

- déterminer $f'(x)$; calculer $f'(3)$;
- en déduire une factorisation de $f'(x)$ par $(x-3)$;
- puis donner les extremums de la fonction f sur $\mathbb{R}$, sur $[-2;4]$ puis sur $[-3;5]$.

Exemples de tangentes à une courbe C_f au point d'abscisse a :

- fig 1 : le cas $f'(a) < 0$ donc f est décroissante au voisinage du point a

- fig 2 : le cas $f'(a) > 0$ donc f est croissante au voisinage du point a

- fig 3 : les trois cas $f'(a) = 0$ en deux figures :

    - figure 3a : 2 extremums locaux + 1 extremum absolu par exemple

        $f'(x_i)$ s'annule en changeant de signe

    - figure 3b : le cas point d'inflexion

        $f'(a)$ s'annule, mais ne change pas de signe

-fig 4 : les cas où f n'est pas dérivable en a

    - fig 4a : le cas du point anguleux avec 2 demi-tangentes

        $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ donc $f'(a)$ n'est pas clairement défini
        alors f est dérivable à gauche et à droite de a, mais pas en a

    - fig 4b : le cas tangente verticale - f est non dérivable en a car la tangente a un coefficient directeur infini, et donc $f'(a) = \infty$, à droite ou à gauche, ou des deux côtés.

Exercices : Divisions de polynômes suivant les puissances croissantes pour factoriser.

Commençons par des exemples simples que nous fabriquons nous-mêmes :

i) $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$ donc diviser x^2+2x-3 par $x+3$;

ii) $(3x-2)(5x+1)=15x^2-7x-2$ donc diviser $15x^2-7x-2$ par $3x-2$;

iii) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+3)=2x^2+2x-\frac{3}{2}$ donc diviser $2x^2+2x-\frac{3}{2}$ par $x-\frac{1}{2}$;

iv) $\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=x^2-\frac{11}{10}x-\frac{3}{5}$ donc diviser $x^2-\frac{11}{10}x-\frac{3}{5}$ par $x+\frac{2}{5}$, ou...

on divise $10\times\left(x^2-\frac{11}{10}x-\frac{3}{5}\right)$ par $10\times\left(x+\frac{2}{5}\right)$,

c'est-à-dire $10x^2-11x-6$ par $10x+4$.

Applications :

1) On donne $P'(x)=-x^3+x^2+3x-3$ la dérivée d'une fonction P.
- Trouver une racine évidente puis factoriser $P'(x)$ à l'aide de cette racine.
- Achever la factorisation de $P'(x)$.
- En déduire le signe de $P'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P.
- Pourriez-vous donner un polynôme $P(x)$ dont la dérivée serait $P'(x)$?

On obtient ici : $P'(x)=(3-x^2)(x-1)$.

2) On donne $Q'(x)=-x^3+x-6$ la dérivée d'une fonction Q.
- Chercher une racine évidente puis factoriser l'expression $Q'(x)$;
- Peut-on achever cette factorisation ?
- Donner le signe de $Q'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction Q.
- Pourriez-vous donner un polynôme $Q(x)$ dont la dérivée serait $Q'(x)$?

On obtient ici $Q'(x)=(x+2)(-x^2+2x-3)$

3) On donne $R'(x)=x^4-2x^3-6x^2+7x+6$.
- chercher deux racines évidentes puis factoriser $R'(x)$;
- donner ensuite le signe de $R'(x)$.
- donner un polynôme possible pour $R(x)$.

On obtient $R'(x)=(x-3)(x+2)(x^2-x-1)$ avec le nombre d'or...

Application à étudier, peut-être en DM :

Un mobile M se déplace en ligne droite ; on note x(t) sa position sur la droite à l'instant t . Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_1 et t_2 , t_2 et t_3 , t_1 et t_3 à l'aide du graphique.

On donne $x(t)=at+b$. Exprimer la vitesse moyenne du mobile entre les instants t et $t+h$; Que vaut la limite ? quel sens a ce nombre ?

Le mobile se déplace maintenant sur une surface plane, suivant une trajectoire particulière, qui peut parfois être représentée par une fonction.

Il existe alors une relation du type $y=f(x)$ entre les coordonnées (x,y) du point M , c'est-à-dire qu'il est possible d'exprimer y en fonction de x et de tracer alors la trajectoire du point M dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Imaginons que les équations horaires soient les suivantes :
$x(t)=\dots$ et $y(t)=\dots$

Calculer les coordonnées du vecteur vitesse en fonction du temps ;

Exprimer y en fonction de x

Tracer quelques points-vecteurs vitesses