Fonctions sinus et cosinus

Peut-être rappeler la définition du radian, puis d'une mesure principale au préalable...

1) **Cercle trigonométrique** : points A, B, tangente T, notations à revoir...

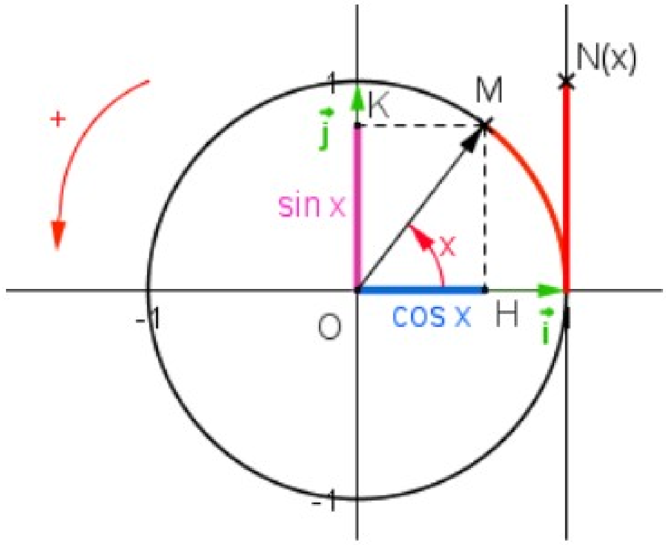
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère le cercle trigonométrique :

c'est le cercle de centre O et de rayon 1.

Pour tout nombre réel x considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x .

A ce point on fait correspondre le point M du cercle trigonométrique.

Le nombre réel x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



Définition 1 :

- Le cosinus du nombre x est l'abscisse du point M : $x_M = \cos x$

- Le sinus du nombre x est l'ordonnée du point M : $y_M = \sin x$

- Sur la tangente, le nombre tan(x) est défini par : $AT(x) = \tan(x)$.

Exercice : démontrer en utilisant le théorème de Thalès que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Applications :

Concrètement sur une figure où M a pour coordonnées polaires (R, α) :

$x_M = R\cos(\alpha)$ $\qquad$ $y_M = R\sin(\alpha)$ $\qquad$ $l = R\alpha$ si α est exprimé en radians.

Et sur une figure de Thalès, $\tan(\alpha)$ pouvant s'exprimer de deux manières comme coté opposé sur coté adjacent,on obtient facilement des rapports égaux.

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Propriété 1 : Pour tout nombre réel x on a :

$$|\cos x| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad |\sin x| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Exercice : démontrer que $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Rappels de première

Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$						

- savoir convertir ces angles en degrés, et compléter la dernière ligne

- savoir convertir un angle en radians également...

Formules des angles associés :

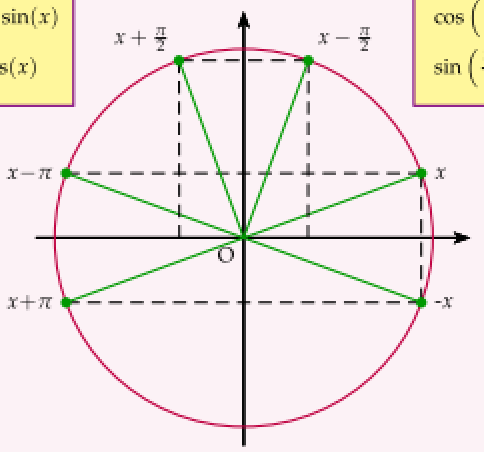
Compléments

Les angles associés :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$



$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

Formules d'addition :

- Avec sinus on panache :
  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- Avec cosinus on ne panache pas :
  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Formules de duplication :

- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
  $= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

Formules d'additions :

Faire démontrer cos(b-a) en utilisant le produit scalaire.

En déduire la formule de cos(a+b) en remplaçant a par -a dans la formule précédente.

Comment passer de ces deux formules à celles du sinus ?

exercices pour trouver d'autres valeurs exactes...

Formules de duplication :

démontrer la première $\cos(2a)=1-2\sin^2 a$ et en déduire la formule de linéarisation ;

démontrer l'autre formule de linéarisation ; exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\sin(a)$ et $\cos(a)$

2) Propriétés des fonctions trigonométriques :

a) Périodicité :

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et $p \in \mathbb{R}$.
(L'ensemble D_f n'est pas nécessairement un intervalle).

On dit que f est p-périodique si et seulement si :

$$\forall x \in D_f \ : \ \begin{cases} x+p \in D_f \\ f(x+p)=f(x) \end{cases}.$$

<u>Remarque</u> : La courbe d'une fonction p-périodique se répète à l'identique à partir d'un intervalle de longueur p.

Propriété 2 : Pour tout nombre relatif k et pour tout nombre réel x on a :

$$\cos(x+2k\pi)=\cos x \qquad \sin(x+2k\pi)=\sin x \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

- On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodique.

Remarque : Pour tracer les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus, il suffit de le faire sur un intervalle de longueur 2π, puis de les compléter par translation.

Exemple :

- Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\cos(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}-$*périodique* .

- Montrer que $h(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$ est $\frac{\pi}{2}-$*périodique* .

- La fonction $h(x)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{x}{5}\right)$ est *quoi* $-$ *périodique* ?

Remarque :

De manière générale, une fonction de la forme $i(t)=I_0\sin(\omega t+\phi)$ est de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

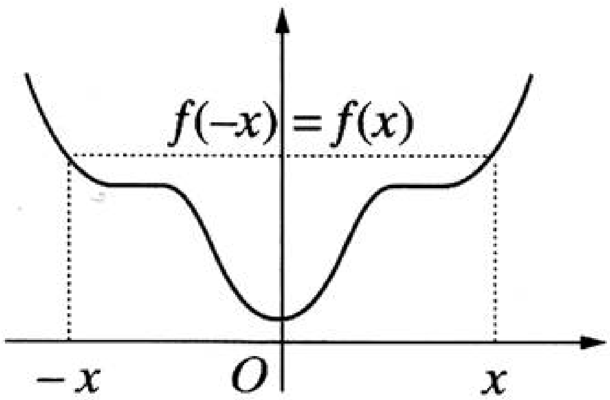
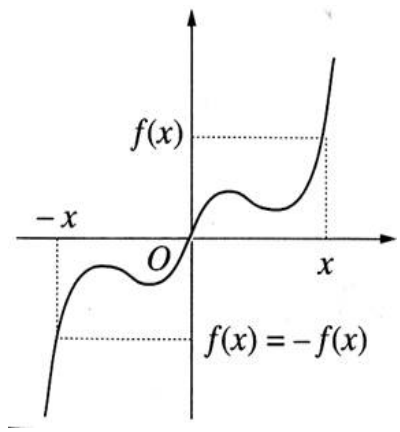
b) Parité :

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f .

On dit que f est **paire** si: $\forall x\in D_f$ on a : $\begin{cases}-x\in D_f \\ f(-x)=f(x)\end{cases}$;

On dit que f est **impaire** si : $\forall x\in D_f$ on a : $\begin{cases}-x\in D_f \\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$

Interprétation graphique :

Dans un repère **orthogonal**, la courbe représentative d'une fonction **paire** est **symétrique par rapport à l'axe vertical.**	Dans un repère **quelconque**, la courbe représentative d'une fonction **impaire** est **symétrique par rapport à l'origine.**
	

Exemple : montrer que la fonction $f(x)=\sin(3x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$ est impaire.

Exercice : montrer que si f est une fonction alors :

la fonction $f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est une fonction paire ; on la note f_p ;

la fonction $f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est une fonction impaire ; on la note f_i.

que pour une fonction f on a toujours : $f=f_p+f_i$;

exemples avec interprétation graphique

Propriété 3 : Pour tout nombre réel x on a :

- $\cos(-x)=\cos x$, donc la **fonction cosinus** est **paire** ;
- $\sin(-x)=-\sin x$, donc la **fonction sinus** est **impaire**.

Remarque :

Pour tracer les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus, il suffit donc de le faire sur l'intervalle $[0;\pi]$. Par symétrie, on obtiendra la courbe sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ qui est bien un intervalle de longueur 2π.

Exercices : Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b) $\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $2\sin(x)-\sqrt{3}=0$ d) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$

e) $\cos(x-\pi)=\sin(3x)$ puis solutions en mesures principales

f) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ g) $2\cos^2 x+\cos x-1=0$

Exercices n° 9 a) et b) page 151, n°47 page 156

3) Dérivabilité et sens de variations :

Propriété :

> Les fonctions sinus et cosinus sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on a :
>
> $$(\cos x)' = -\sin x \quad \text{et} \quad (\sin x)' = \cos x$$

<u>Remarque</u> : Posons $f(x) = \cos x$ de courbe C_f et $g(x) = \sin x$ de courbe C_g.

- Équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ donc $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ce qui donne :
$y - 1 = 0$ et donc $y = 1$, et donc la tangente est horizontale.

- Équation de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse $x_0 = 0$:

$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0)$ donc $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$ ce qui donne :
$y - 0 = 1 \times x$ et donc $y = x$, la première bissectrice.

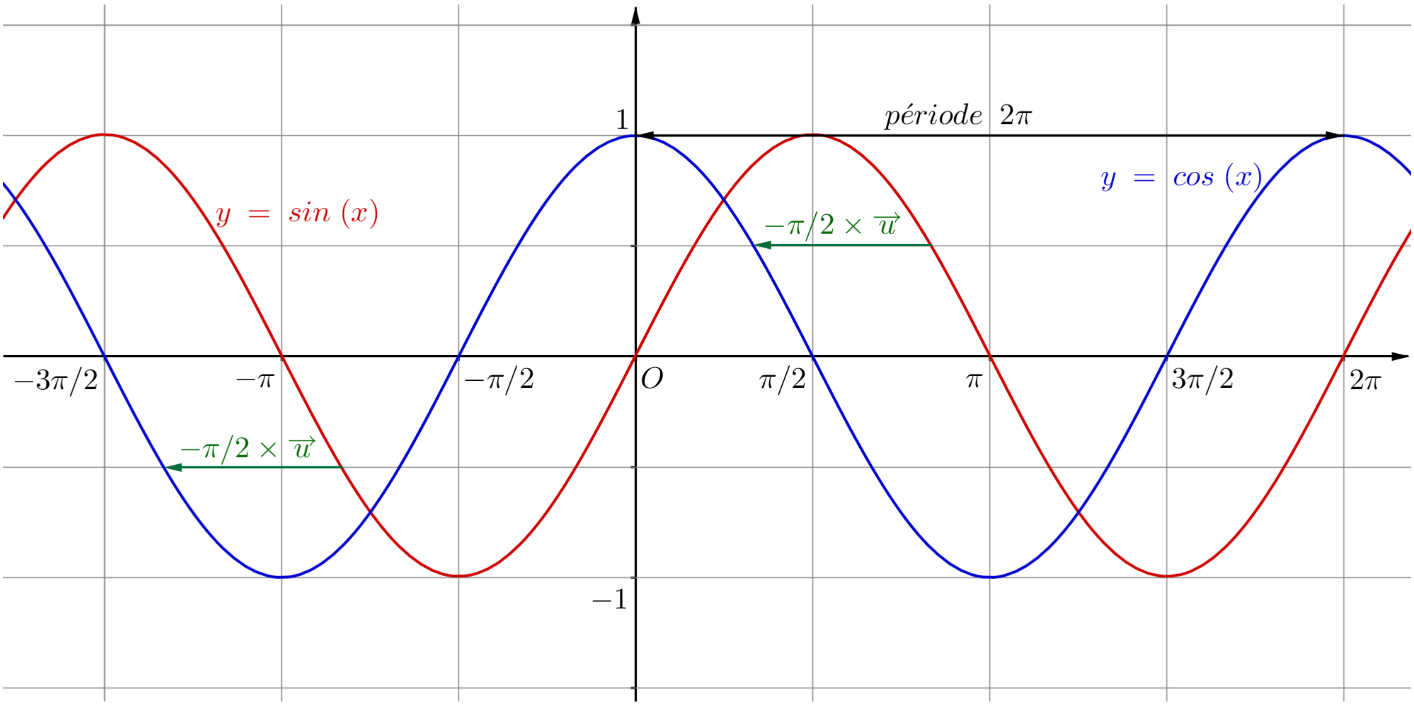
<u>Tableau de variations de la fonctions cosinus</u> :

x	0		π
$f'(x) = -\sin x$	0	-	0
$f(x) = \cos x$	1	$\searrow$	-1

<u>Tableau de variations de la fonctions sinus</u> :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x) = \cos x$	1	+	0	-	-1
$g(x) = \sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoïdes.
- De la relation $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on déduit la sinusoïde de cosinus par une translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ de la sinusoïde de sinus.



<u>Exemple d'utilisation en physique</u> :

Un son pur est caractérisé par :

- sa fréquence F en Hertz, qui correspond aux nombres de pulsations par secondes, et qui donne la hauteur du son ;
- son amplitude P en Pascal, qui correspond à la pression acoustique ;

La fréquence F est reliée à la période T de la sinusoïde par la relation : F=1/T

La fonction f associée est alors : $f(t)=P\sin(2\pi Ft)$.

On note souvent $\omega=2\pi F=\frac{2\pi}{T}$ appelée la pulsation de l'onde sonore : $f(t)=P\sin(\omega t)$.

Avec un La_3 de fréquence $440\,Hz$ et d'amplitude 1Pa on aura : $f(t)=\sin(880\pi t)$.

4) Compléments :

Calculs de dérivées de fonctions circulaires composées :

Rappel :

Pour fabriquer la fonction « f rond u » $f \circ u : x \mapsto f(u(x))$, il faut procéder en deux étapes :

- la fonction $u : x \mapsto u(x)$ en premier, définie par exemple de I dans J ;
- suivie de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ prise pour $u(x)$, donc définie sur J ;

Si les fonctions u et f sont dérivables sur leurs ensembles de définition, alors la fonction composée $f \circ u$ est définie et dérivable sur I, de fonction dérivée :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Soient a et b deux réels, et les fonctions $f(x) = \cos(ax+b)$ et $g(x) = \sin(ax+b)$.

Alors $f'(x) = -a\sin(ax+b)$ et $g'(x) = a\cos(ax+b)$

Applications : Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1) $h(x) = \sin\left(10x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) $k(x) = \sin(3x-4) \times \cos(2x+5)$

3) $v(t) = (3t+2)\sin(3t+2)$

4) $u(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{t^2}\right)$

5) $f(x) = \cos(3x) + \cos^2 x$

Deux limites à connaître :

Si l'on cherche à déterminer la limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0, on obtient une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

De même, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{0}{0}$ est une forme indéterminée.

Or ces limites sont souvent utiles !

Levons ces indéterminations en utilisant la définition du nombre dérivé d'une fonction en 0 :

Comme $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, alors $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$; on a donc :

i) $\sin'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h-\sin 0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}$, mais on sait que $\sin' x=\cos x$ donc $\sin' 0=\cos 0=1$

ce qui donne finalement : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

ii) $\cos' 0=\ldots$

ce qui donne finalement : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$.