Intégrales et primitives

Le but de l'intégration est de calculer l'aire sous une courbe.

Cadre : f est une fonction **continue** et **bornée** sur un **segment borné** $[a\,;b]$.

1) La Notion d'intégrales :

a) Définition pour une fonction positive :

Définition 1 : Soit f une fonction **continue**, **bornée** et positive sur le segment $[a\,;\,b]$.

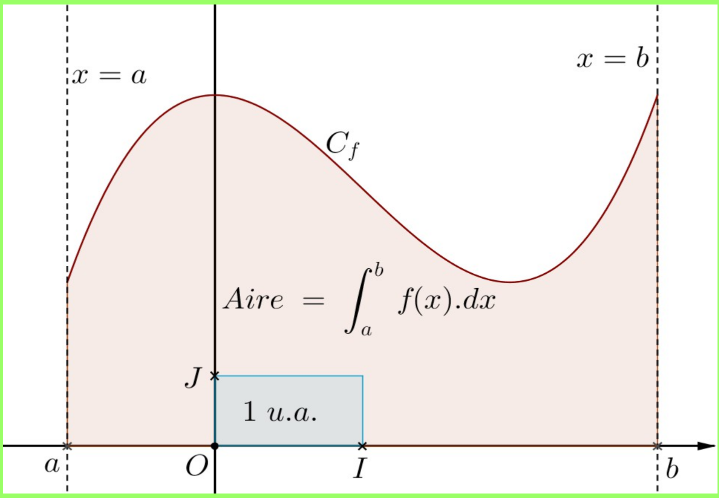
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J).

* L'**unité d'aire (u.a)** est l'aire du rectangle OIJ ;

* **Le domaine à mesurer** est délimité par :

- la courbe C_f ;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

C'est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan vérifiant : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$

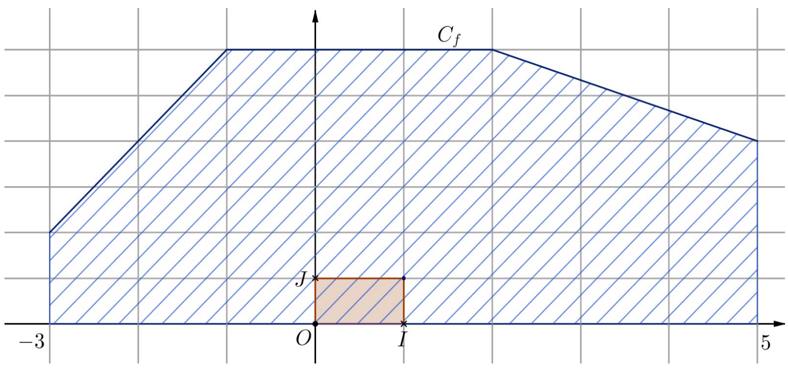


* **L'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$** est le nombre réel noté $\int_a^b f(x).dx$,
qui est la mesure de l'aire du domaine sous la courbe de C_f exprimé en u.a.

Exemple :

On considère la représentation graphique d'une fonction f sur $[-3;5]$.

On donne $OI=3\text{cm}$ et $OJ=2\text{cm}$.



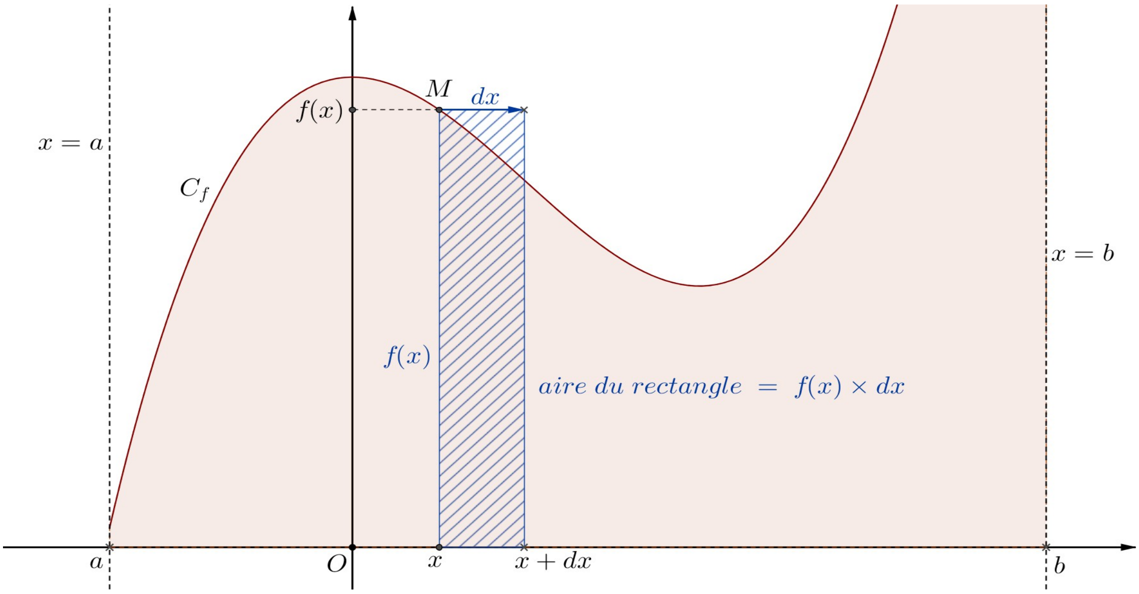
Calculer l'intégrale $\int_{-3}^{5} f(t).dt$ en u.a., puis l'aire hachurée en cm^2.

b) Interprétations :

Vocabulaire : $\int_a^b f(x).dx$ se lit : « intégrale de a à b de f(x) dx »

a et b s'appellent **les bornes d'intégration**.

Dans l'écriture $\int_a^b f(x).dx$ le **dx** désigne un **déplacement infinitésimal** de l'abscisse x :



Pour obtenir l'aire totale, il faut faire la somme des petites aires $f(x).dx$ en faisant varier x de manière continue de a à b, l'élément dx restant suffisamment petit.

Ce n'est pas une somme discrète $\sum$ pour x variant de 0,1 en 0,1 par exemple.
C'est une somme continue qui s'écrit avec le symbole $\int$.

Interprétation cinématique de l'intégrale :

A un instant t, un mobile M se déplace sur une trajectoire à la vitesse $v(t)$;
pendant un très court instant dt, il parcourt une petite distance $v(t)\,dt$;
donc entre les instants t_1 et t_2 il aura parcouru une distance totale $d = \int_{t_1}^{t_2} v(t).dt$.

Notation :

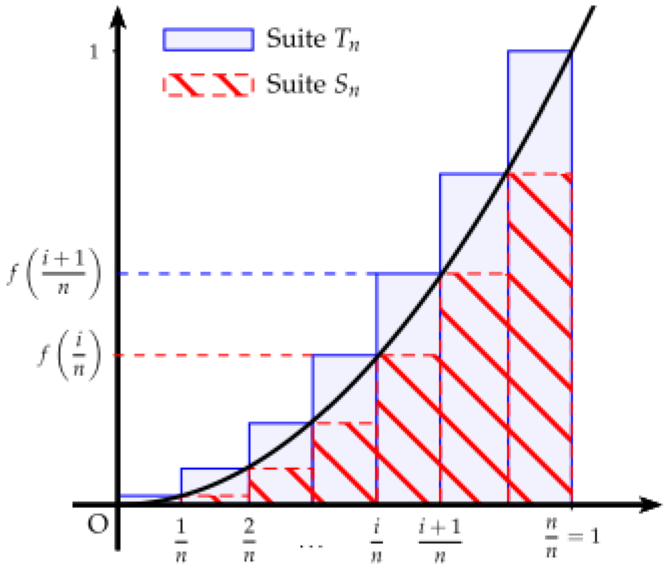
La **variable x** sous le signe intégral est **muette**, car elle n'apparaît pas dans le résultat :

- on peut écrire $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(t).dt = \int_a^b f(u).du$ qui sont des réels ;
- du , dx ou dt permet de reconnaître la variable d'intégration ;
- $\int_a^b (3tx^2 - 5t^3 + 1).dx$ est une fonction de la variable t par exemple.

c) Calcul d'une intégrale à l'aide d'une somme d'aire de rectangles :

Le problème : Calculer l'intégrale de la fonction carrée f sur $[0;1]$.

Il s'agit donc de calculer l'aire $\mathscr{A}$ sous la parabole dans l'intervalle $[0\,;1]$. L'idée de Riemann est d'encadrer cette aire par deux séries de rectangles. On divise l'intervalle $[0\,;1]$ en n parties. Sur chaque petit intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, on détermine la valeur minimale et maximale de la fonction carrée. Comme cette fonction est croissante sur $[0\,;1]$, la valeur minimale est $f\left(\frac{i}{n}\right)$ et la valeur maximale $f\left(\frac{i+1}{n}\right)$. On obtient alors ces deux séries de rectangles comme la figure ci-dessous :



On définit deux suites avec $f(x) = x^2$:

- La suite (S_n) des rectangles hachurés dont l'aire est S_n :

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}$$

- La suite (T_n) des rectangles bleus dont l'aire est T_n :

$$T_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = S_n + \frac{1}{n}$$

L'aire sous la courbe $\mathscr{A}$ vérifie donc : $S_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant T_n$

Algorithme pour programmer les suites S_n et T_n :

On a $S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$ et la précision de l'encadrement sera donc de $\frac{1}{n}$.

<table>
<tr><th>En langage naturel :</th><th>En Python :</th></tr>
<tr><td>

S ← 0
Pour i allant de 1 à n - 1 faire :
    $S \leftarrow S + i^2 / n^3$
Fin du pour
T ← S + 1 / n
Afficher S et T

</td><td>

```python
# intégrale de la fonction carrée sur [0;1]
n = int(input("nombre d'intervalles:"))
s = 0
for i in range(n):
    s = s + i**2/n**3
t = s + 1/n
print("s=", s)
print("t=", t)
```

</td></tr>
</table>

Exercice :

1) Programmer cet algorithme.
   Qu'obtient-on comme encadrements pour $n=10$ et $n=100$?

2) Démontrer que $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) En déduire l'expression des sommes S_n et T_n.

4) Déterminer alors la valeur de l'aire recherchée.

<u>*Cet exemple se généralise*</u> : Il est toujours possible d'encadrer l'aire sous la courbe d'une fonction *continue*, *bornée* et *positive* sur un *segment borné*, par deux suites de même limite.

Exercice :

Calcul de $\int_{-1}^{1} \sqrt{(1-x^2)}.dx$ en interprétant géométriquement le cercle unité d'équation $x^2+y^2=1$.

2) La Notion de primitives :

a) Primitives :

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I, non nécessairement borné.

On dit que f admet une **primitive sur I** si et seulement si :

il existe une fonction F dérivable sur I telle que : $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

C'est-à-dire que f est la dérivée d'une autre fonction F sur tout l'intervalle I.

Remarque : le signe de f donne le sens de variation de F.

Exercice : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

i) $f(x)=3x^2$ ii) $g(x)=3/x^2$ iii) $h(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

Propriété 1 : Si f admet une primitive F sur I, alors toutes ses autres primitives diffèrent à une constante près.

Autrement dit, toutes les primitives de f sont de la forme : $G(x) = \mathrm{F}(x) + Cste$.

preuve : si G et F sont deux primitives de f sur I alors :

$G'(x) = f(x) = \mathrm{F}'(x)$ donc $G'(x) - \mathrm{F}'(x) = 0$ et $\left(G(x) - \mathrm{F}(x)\right)' = 0$ est de dérivée nulle, donc $G(x) - \mathrm{F}(x) = Cste$, et finalement $G(x) = \mathrm{F}(x) + Cste$ sur tout I.

Remarques : - une fonction qui possède une primitive en admet en fait une infinité.
- la constante C est appelé constante d'intégration.

Exercice : Donner toutes les primitives de $f(x)=e^{-2x}$ et $g(x)=\dfrac{3}{x}$.

Propriété 2 : Si une fonction f admet une primitive F sur I, alors elle en possède une seule dont la courbe passe par le point de coordonnées $(a\,;b)$ où $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathbb{R}$ est quelconque.

preuve : $G(x)=\mathrm{F}(x)+C$ avec $b=\mathrm{F}(a)+C$ donc la constante $C=b-\mathrm{F}(a)$ est bien unique.

Exemple : Déterminer la primitive de $f(x)=3x^2-2x+1$ qui s'annule en 2.

b) Primitives des fonctions usuelles :

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

c) Règles d'intégration :

D'après les règles de dérivation, on déduit les règles suivantes en prenant comme constante d'intégration $k = 0$:

Primitive de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int (au) = a \int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\dfrac{u'}{u}$	$\int \dfrac{u'}{u} = \ln \lvert u \rvert$
Primitive de $\dfrac{u'}{u^n} \quad n \neq 1$	$\int \dfrac{u'}{u^n} = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$

Exemples :

⚠ Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour obtenir une forme donnée

Polynôme : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, alors $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x$

Forme $\mathbf{u'u^n}$: $f(x) = 2x(x^2-1)^3$, alors $F(x) = \frac{(x^2-1)^4}{4}$

$$f(x) = (3x-1)^4 = \frac{1}{3}\left[3(3x-1)^4\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^5}{5} = \frac{(3x-1)^5}{15}$$

Forme $\mathbf{\frac{u'}{u}}$: $f(x) = \frac{2}{2x-3}$, alors $F(x) = \ln|2x-3|$

$$f(x) = \frac{1}{4x+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{4x+1}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{1}{4}\ln|4x+1|$$

Forme $\mathbf{\frac{u'}{u^n}}$: $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}\right]$, alors

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2+2x-3)}$$

Forme $\mathbf{\frac{u'}{\sqrt{u}}}$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ alors $F(x) = 2\sqrt{x+4}$

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{2x+1}}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{3}{2}\times 2\sqrt{2x+1} = 3\sqrt{2x+1}$$

Forme $\mathbf{u'e^u}$: $f(x) = e^{4x+1} = \frac{1}{4}\left[4e^{4x+1}\right]$, alors $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x+1}$

$$f(x) = xe^{-x^2+3} = -\frac{1}{2}\left[-2xe^{-x^2+3}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+3}$$

3) Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle :

a) Théorème fondamental de l'intégration :

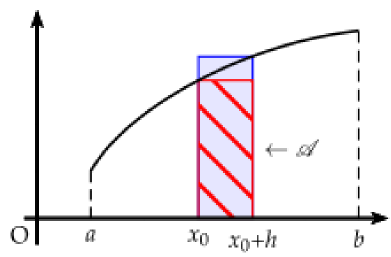
> Théorème 1 : Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un **segment** $[a;b]$.
>
> Alors la fonction F définie par $F(x)=\int_a^x f(t).dt$ est dérivable sur $[a;b]$ avec $F'=f$.

preuve à connaître dans le cas d'une fonction f monotone et positive :

Montrons que si $x_0\in[a;b]$ alors $F'(x_0)=f(x_0)$, donc que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

On choisit donc un réel quelconque $x_0\in[a;b]$, et un réel $h\neq 0$.

- $F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t).dt-\int_a^{x_0} f(t).dt=Aire2-Aire1=\text{Aire hachurée}=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t).dt$ que la fonction soit croissante ou décroissante.



- Si $h>0$ et que f est croissante sur $[a;b]$,
  alors cette aire vérifie :

  $h\,f(x_0)\leqslant Aire\leqslant h\,f(x_0+h)$ comme on le voit sur la figure...

  Ce qui donne : $h\,f(x_0)\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)\leqslant h\,f(x_0+h)$

  et donc : $f(x_0)\leqslant\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$ puisque $h>0$.

- Si f est décroissante et $h>0$ l'aire sera encadrée par $h\,f(x_0+h)\leqslant Aire\leqslant h\,f(x_0)$

  et on obtiendra alors $f(x_0+h)\leqslant\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0)$ avec $h>0$.

- Si $h<0$, les inégalités précédentes sont simplement inversées en divisant par h .

Conclusion : Comme f est continue en x_0 , alors $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$ (figure pour justifier).

D'après le théorème des gendarmes, on obtient finalement : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$,

ce qui prouve que $F'(x_0)=f(x_0)$ pour tout x_0 , donc que $F'=f$.

Remarque : Ce théorème se généralise aux cas de toutes les fonctions continues sur un intervalle borné $[a;b]$, qu'elles soient positives ou non, monotone ou pas.

Propriété 3 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Remarque : $\int_a^x f(t).\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a puisque $\mathrm{F}(a)=\int_a^a f(t).\mathrm{d}t=0$.

Exemple :

On ne connaît aucune expression algébrique explicite d'une primitive de e^{-x^2}, mais on peut toujours l'écrire sous la forme d'une intégrale...

b) Utilisation de la calculatrice :

à voir sur le livre et en classe sur des exemples à l'occasion...

c) Calcul d'intégrales à l'aide de primitives :

Théorème 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et F une primitive quelconque de f sur I.

Alors pour tout réels $a, b \in \mathrm{I}$ on a : $\int_a^b f(t).\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(t)]_a^b = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

preuve :

- $G(x)=\int_a^x f(t).\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a, et $G(b)=\int_a^b f(t).\mathrm{d}t$.

- Soit F une primitive quelconque de f sur I ; alors $\mathrm{F}(x)=G(x)+C$;
  donc $\mathrm{F}(a)=G(a)+C=C$ et $\mathrm{F}(b)=G(b)+C$ et $G(b)=\mathrm{F}(b)-C=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$;
  ce qui prouve que $\int_a^b f(t).\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ pour toute primitive F de la fonction f.

Exemples :

1) Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{2}(x^2-4x+3)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(x^2-4x+3)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_{-1}^{2}\\ &= \left(\frac{8}{3}-2\times4+3\times2\right)-\left(-\frac{1}{3}-2-3\right)\\ &= \frac{8}{3}-8+6+\frac{1}{3}+2+3=6\end{aligned}$$

2) Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{2}\frac{3x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

$$\int_{0}^{2}\frac{3x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_{0}^{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_{0}^{2}=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5}+1\right)=\frac{6}{5}$$

<u>Remarque</u> :

On peut alors choisir n'importe laquelle des primitives $F+C$ d'une fonction f pour déterminer la valeur de son intégrale entre deux bornes quelconques.

Le résultat est indépendant du choix de la primitive.

d) Intégrales et aires :

- Si f est positive : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = Aire_1$ représente l'aire du domaine ;

- Si f est négative : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -Aire_2$ représente l'opposé de l'aire du domaine ;

- Si f est quelconque : $\int_a^b f(t).\mathrm{d}t = A_1 - A_2 + A_3$ représente l'aire algébrique du domaine.

Remarque : cas des fonctions paires et impaires

i) Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.

ii) Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exemple : figures et unités, valeur de l'intégrale, valeur de l'aire

4) Propriétés de l'intégrale :

a) Linéarité de l'intégrale : C'est la propriété la plus importante.

Propriété 4 : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.

Alors pour tout réels α et β on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)).dt = \alpha \times \int_a^b f(t).dt + \beta \times \int_a^b g(t).dt .$$

preuve : si F et G sont des primitives de f et g alors il est facile de voir par dérivation que $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Exemple :

Formules de linéarisation pour calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x .dx$ puis calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x .dx$.

b) Propriétés algébriques de l'intégrale :

Propriété 5 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors on a :

i) $\forall a \in I$, $\int_a^a f(t).dt = 0$;

ii) $\forall\ a , b \in I$, $\int_b^a f(t).dt = -\int_a^b f(t).dt$; (signe de f(t)dt sur une figure)

iii) **Relation de Chasles** : $\forall a , b , c \in I$, $\int_a^b f(t).dt + \int_b^c f(t).dt = \int_a^c f(t).dt$.

preuves : en utilisant encore la relation fondamentale $\int_a^b f(t).dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Par exemple, pour la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x).dx + \int_b^c f(x).dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(a) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x).dx .$$

L'interprétation graphique est assez facile à voir... il suffit de faire un dessin.

c) Intégrales et inégalités :

Propriété 6 : Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$.

i) Si $f \geqslant 0$ sur $[a;b]$, alors $\int f \geqslant 0$ (l'intégration est une opération **positive**) ;

ii) Si $f \geqslant g$ sur $[a;b]$, alors $\int f \geqslant \int g$ (l'intégration est une opération **croissante**) ;

iii) $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$ (l'intégration est une opération **continue** pour la norme infini) ;

preuves :

i) immédiat d'après la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive ;

ii) si $f \geqslant g$ alors $f-g \geqslant 0$ et donc $\int f-g \geqslant 0$ ce qui donne $\int f \geqslant \int g$ par linéarité ;

iii) $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ donc donc $\int -|f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$ soit $-\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$ ou encore $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.

Exemple :

- Cas de l'aire entre deux courbes $Aire = \int_a^b \left(g(t) - f(t)\right).dt$ si $g \geqslant f$.
- Entre une courbe et sa tangente... trouver un problème concret où cette aire a un sens.
- Pour encadrer une intégrale...à partir d'une inégalité portant sur la fonction.

Rappelons que l'intégrale d'une fonction peut-être nulle, sans que la fonction soit égale à la fonction nulle. Par exemple pour une fonction impaire entre les bornes $-a$ et a.

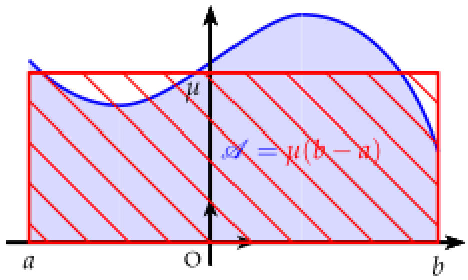
d) Théorème de la moyenne :

Définition 3 : Valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$.

C'est le nombre $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).dt$.

Interprétation graphique :

Comme $\mu \times (b-a) = \int_a^b f(t).dt$, le rectangle de hauteur μ et de largeur $(b-a)$ a la même aire algébrique que le domaine sous la courbe.



Remarque :

- Cette définition généralise la moyenne discrète d'une série statistique : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$;
- En cinématique, la vitesse moyenne V d'un mobile entre les instants t_1 et t_2 dont la vitesse instantanée est $v(t)$ sera $V = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t).dt$.

Propriété 7 : Inégalité de la moyenne.

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ telle que $\forall x \in [a;b]$ on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a).$$

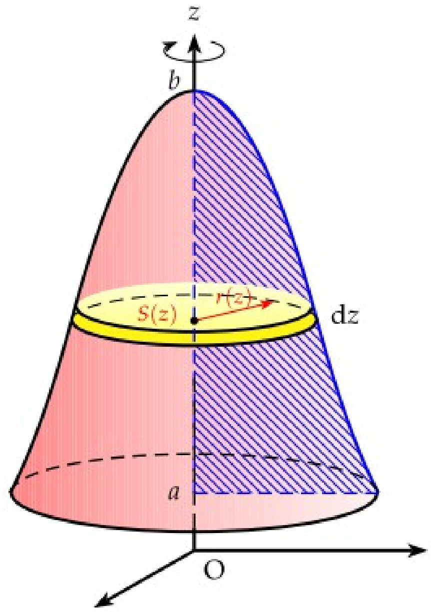
preuve : si $m \leqslant f \leqslant M$ alors $\int_a^b m \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b M$ donc $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t).dt \leqslant M(b-a)$.

Propriété 8 : Théorème de la moyenne.

Toute fonction continue prend au moins une fois sa valeur moyenne sur $[a;b]$.

Autrement dit : Il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).dt$.

5) Applications du calcul intégral à des calculs d'aires et de volumes :



Une méthode pour déterminer le volume d'un solide, consiste à découper celui-ci par des plans parallèles.

On **intègre** ensuite les surfaces obtenues par ce découpage **suivant l'axe** perpendiculaire à ces plans.

On s'intéresse uniquement au volume de solide de révolution.

Solide de révolution :

solide engendré par une surface de révolution.

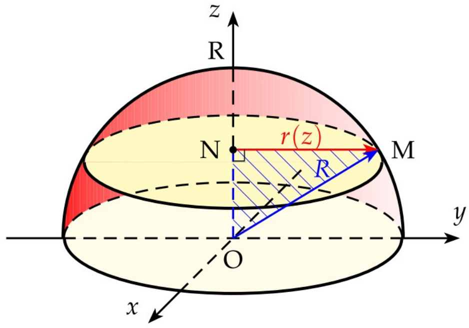
Surface de révolution :

surface engendrée par une courbe (directrice) tournant autour d'un axe.

Si l'axe (Oz) est l'axe de révolution, le volume V du solide de révolution est égal à :

$$V=\int dV=\int_a^b S(z)dz=\int_a^b \pi r^2(z)dz .$$

Calcul du volume d'une sphère :



Compte tenu de la symétrie de la sphère, on calcule le volume d'une demi-sphère qu'on multipliera ensuite par 2.
On découpe ainsi la demi-sphère avec des plans parallèles à l'axe (Oz).
Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayons $r(z)$.

La surface de ces cercles vaut : $S(z)=\pi r^2(z)$.

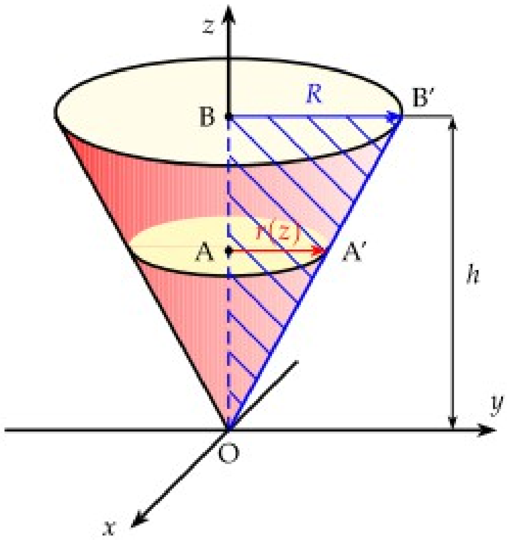
Il suffit alors d'exprimer $r(z)$ en fonction de z à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ONM : $r^2(z)=R^2-z^2$.

On obtient alors le demi-volume de la sphère :

$$\frac{1}{2}V=\int S(z).dz=\int_0^R \pi\left(R^2-z^2\right).dz=\left[\pi\left(R^2z-\frac{z^3}{3}\right)\right]_0^R=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi R^3$$

On en déduit le volume de la sphère que tout le monde à appris : $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Calcul du volume d'un cône de révolution :



On découpe le cône d'axe (Oz) avec des plans perpendiculaires à l'axe (Oz).

Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$.

1) Il reste à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de z.

Méthode 1 : **Thalès**

Dans le triangle $OB'B$ on a (AA') // (BB') donc la propriété de Thalès donne :

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}=\frac{AA'}{BB'} \text{ et donc } \frac{z}{h}=\frac{r(z)}{R} \text{, ce qui donne finalement } r(z)=\frac{R}{h}z.$$

Méthode 2 : **Tangente**

$$\tan\alpha=\frac{oppose}{adjacent}=\frac{R}{h}=\frac{r(z)}{z} \text{ donc } r(z)=\frac{R}{h}z \text{ encore.}$$

2) Puis à calculer le volume du cône : $V=\int S(z).dz=\int_0^h \pi r^2(z).dz$.

$$V=\int S(z).dz=\int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}z^2.dz=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^2.dz=\frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi R^2}{h^2}\frac{h^3}{3}=\frac{\pi R^2 h}{3}$$

On retrouve normalement le volume du cône que tout le monde connaît :

$$V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\pi R^2 h \text{ (formule identique pour une pyramide).}$$

6) Rapports entre fonction, dérivée et primitives :

1) **La dérivation annule l'intégration** :

Si f est continue sur I , alors $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t).\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I , c'est-à-dire que pour tout $x\in\mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x)=f(x)$. F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

La famille des primitives de f se fabrique donc en intégrant la fonction f , et la dérivation annule cette intégration.

En notant $\int f$ une primitive de la fonction f , ce qui précède s'écrit : $\left(\int f\right)'=f$.

2) **L'intégration annule la dérivation (à une constante près)** :

Si f' est une fonction continue sur I , alors $\int_a^x f'(x).\mathrm{d}x$ est une fonction bien définie, qui est la primitive de f' qui s'annule en a . Mais la fonction f est elle-même une primitive de f' ; ces deux fonctions sont donc égales à une constante près :

en effet, comme $\int_a^x f'(t).\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, on a : $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t).\mathrm{d}t$.

En intégrant la dérivée f' , on retrouve la fonction f à une constante près.

L'intégration annule la dérivation, ce qu'on peut écrire symboliquement : $\int f'=f$.

3) Application : **Formule d'intégration par parties**.

Comme $(uv)'=u'v+uv'$ alors $u'v=(uv)'-uv'$ et donc $\int u'v=\int(uv)'-\int uv'$ qu'on écrit :

$$\int u'v=uv-\int uv' \text{ ou concrètement : } \int_a^b u'v=[\,uv\,]_a^b-\int_a^b uv'.$$

<u>Exemple</u> : primitive de $\ln x$.