- Vocabulaire des probabilités et rappels -

1.1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers Ω est l'ensemble des issues possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire e_i est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
- L'événement $A \cap B$ (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
- L'événement $A \cup B$ (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1$ et $P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

- $P(\varnothing) = 0\,;\quad P(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1\,;\quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  (si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)
- Pour une loi équirépartie :

$$P(A) = \frac{\text{nbre d'éléments de A}}{\text{nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

1.2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque issue associe un réel x_i. La probabilité que X prenne la valeur x_i est alors notée $P(X = x_i)$ ou p_i.

- Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
- Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
  L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire
- Variance de X : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X) = p_1 x_1^2 + \cdots + p_n x_n^2 - E^2(X)$
- Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 euros dans le cas contraire. X, la variable aléatoire égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.

On a $P(X = 6) = \dfrac{4^3}{6^3} = \dfrac{8}{27}$ et $P(X = -3) = 1 - p(X = 6) = \dfrac{19}{27}$

$$E(X) = -3 \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$V(X) = (-3)^2 \times \frac{19}{27} + 6^2 \times \frac{8}{27} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{152}{9} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{152}{9}} = \frac{2\sqrt{38}}{3}$$

1.3 Loi binomiale

- On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre)
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathscr{B}(n; p)$.

- Probabilité d'obtenir k succès : $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Espérance de X : $E(X) = np$
- Variance et écart-type de X : $V(X) = np(1-p)$; $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Conditionnement et indépendance

Dans tout ce chapitre, on considère une expérience aléatoire d'univers Ω. (l'ensemble de toutes les issues possibles), et P désigne une loi de probabilité sur Ω.

1) Probabilité conditionnelle :

Définition 1 : Soit A et B deux **événements** de l'univers Ω, avec $P(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

On la note $P_A(B)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$, qui se lit « probabilité de B sachant A ».

Exemple n°1 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement "La carte est un pique".
Soit B l'événement "La carte est un roi".

Déterminons $P_A(B)$ avec la définition précédente. Que vaut $P_A(\overline{B})$?

Remarque :

Les probabilités conditionnelles vérifient les même propriétés que les probabilités habituelles, et notamment :

$0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$ $\quad$ $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$ $\quad$ et de plus $\quad$ $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

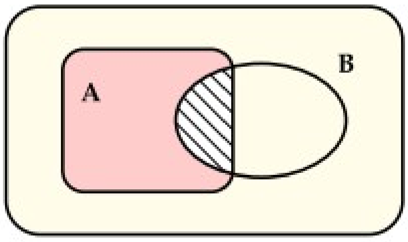
Exemple n°2 :

Un sac contient 50 billes, dont 20 billes Rouges et 30 billes Noires, où il est marqué soit "Gagné" soit "Perdu". Sur 15 billes Rouges, il est marqué Gagné. Sur 9 billes Noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une bille dans le sac.

Soit R l'événement "On tire une bille Rouge".
Soit G l'événement "On tire une bille marquée Gagné".

Déterminons $P_R(G)$ à l'aide d'un tableau à double entrée.

Remarque : La probabilité de B sachant A correspond à la part de B dans A, c'est à dire la part hachurée dans l'ensemble A

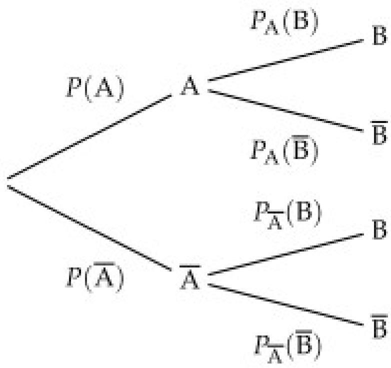


La probabilité de B sachant A correspond à la part de l'ensemble B dans l'ensemble A

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\text{Nbre d'éléments communs à A et B}}{\text{Nbre d'élément de A}} = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

Utilisation d'un arbre de probabilités :

Soient deux événements A et B. On peut représenter par un arbre pondéré les probabilités suivantes lorsque l'on connaît les probabilités de B ou $\overline{\mathrm{B}}$ lorsque A est réalisé.



Exemple n°3 : Avec un arbre de probabilité.

Dans un lycée 54 % des élèves sont des filles, dont 72 % sont externes.
De plus, 76 % des garçons sont externes.

Représentons la situation par un arbre pondéré, identifions $P_F(E)$ et $P_{\overline{F}}(E)$ puis calculons $P(E)$.

Propriété : Pour remplir et utiliser un arbre, on a les propriétés suivantes :

- Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes (attention pas de pourcentage).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin. Par exemple la probabilité d'avoir une fille externe :
  $P(\mathrm{F}) \times P_{\mathrm{F}}(\mathrm{E}) = P(\mathrm{F} \cap \mathrm{E}) = 0,54 \times 0,72 = 0,3888$
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement. Par exemple la probabilité d'avoir un élève externe :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) &= P(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) + P(\mathrm{E} \cap \mathrm{G}) \\ &= 0,54 \times 0,72 + 0,46 \times 0,76 \\ &= 0,7384 \end{aligned}$$

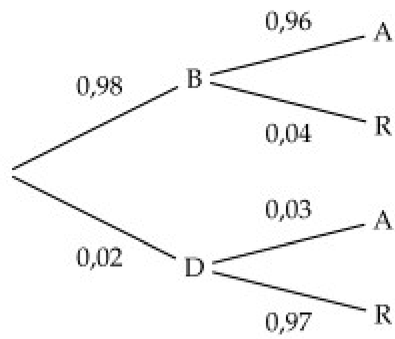
Autre exemple : Dans un atelier, il y a 2% de pièces défectueuses. On effectue un test pour savoir si on doit accepter ou refuser une pièce. On a observé que :

- Si la pièce est bonne, elle est acceptée par ce test à 96%.
- Si la pièce est défectueuse, elle est refusée par ce test à 97%.

Quel est le pourcentage de retour client ?

On appelle les événement suivants :
B : "la pièce et bonne",
D : " la pièce est défectueuse",
A "la pièce est acceptée",
R "la pièce est refusée".

On construit l'arbre ci-contre



On doit calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée :

$$P(\mathrm{D} \cap \mathrm{A}) = 0,02 \times 0,03 = 0,0006$$

On peut s'attendre à 0,06% de retour client.

Propriété 1 : Formule des probabilités totales

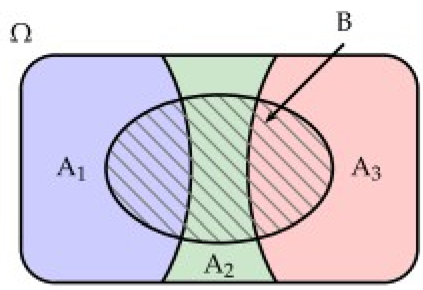
Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de l'univers Ω (ensembles deux à deux incompatibles et dont l'union forme Ω).

Alors pour tout événement B , on a : $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$.

Par exemple pour une partition de Ω en trois ensembles : A_1, A_2 et A_3.

On a alors :

$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{B})$.



Remarque : Dans la plupart des cas, on utilise la partition A et $\overline{\mathrm{A}}$. Dans un arbre, le nombre n d'ensembles formant une partition donne le nombre de branches issues d'un nœud.

Exercice : Calculer la probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles d'un arbre.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

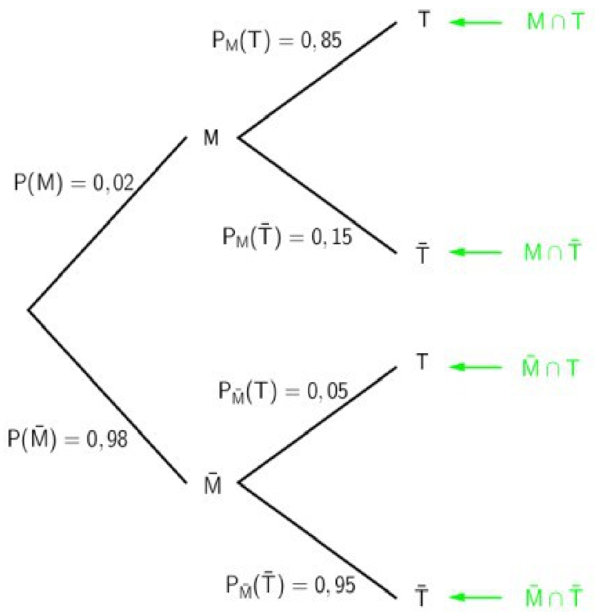
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

---

1) On dresse l'arbre de probabilité correspondant.



La probabilité que le test soit positif est associé aux feuilles $M \cap T$ et $\overline{M} \cap T$.

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$ (probabilités totales)
donc $P(T) = 0{,}02 \times 0{,}85 + 0{,}98 \times 0{,}05 = 0{,}066$.

La probabilité que le test soit positif est égale à $6{,}6\,\%$.

2) $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0{,}02 \times 0{,}85}{0{,}066} = 0{,}26$

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ $26\,\%$.

Rappel : Pour tout événements A et B d'un univers Ω on a :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

2) Événements indépendants :

Définition 2 : On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \text{ ou lorsque } P(A)\neq 0 \quad P_A(B)=P(B).$$

Remarque : La probabilité de B ne dépend pas de l'événement A : $P_A(B)=P(B)$ et $P_B(A)=P(A)$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement « On tire un roi » et T l'événement « On tire un trèfle ».

On a donc $P(R)=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$ et $P(T)=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$.

L'événement $R\cap T$ est l'événement : « On tire le roi de trèfle ».

Donc $P(R\cap T)=\dfrac{1}{32}$.

On vérifie alors que $P(R)\times P(T)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{32}=P(R\cap T)$.

Ce qui montre que les événements R et T sont donc indépendants.

Ainsi, par exemple, $P_T(R)=P(R)$. Ce qui se traduit par :

« la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles est égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes ».

Contre-exemple : On reprend cette expérience en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.

Ainsi on a : $P(R)=\dfrac{4}{34}=\dfrac{2}{17}$, $P(T)=\dfrac{8}{34}=\dfrac{4}{17}$ et $P(R\cap T)=\dfrac{1}{34}$.

Donc $P(R)\times P(T)=\dfrac{2}{17}\times\dfrac{4}{17}=\dfrac{8}{289}\neq P(R\cap T)$,
ce qui montre que les événements R et T ne sont plus indépendants.

En effet : « la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles est plus grande que la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes » !

Donc $P_T(R)\neq P(R)$. Vérifiez vous-même !

<u>Méthode</u> : Utiliser l'indépendance de deux événements.

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à $0{,}005$ et par la maladie n avec une probabilité égale à $0{,}01$.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit M l'événement "L'individu a la maladie m" et N l'événement "L'individu a la maladie n".

On suppose que les événements M et N sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement E : "L'individu a au moins une des deux maladies".

$$P(E)=P(M\cup N)=P(M)+P(N)-P(M\cap N)$$

$$P(E)=P(M)+P(N)-P(M)\times P(N)$$ car les deux événements sont indépendants

$$P(E)=0{,}005+0{,}1-0{,}005\times 0{,}01=0{,}01495$$

Donc la probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est d'environ $1{,}5\%$.

Propriété 2 : Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

i) $\overline{A}$ et B ii) A et $\overline{B}$ iii) $\overline{A}$ et $\overline{B}$

preuve :

i) Il faut prouver que $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P(B)$.

Comme A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω on a $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$.

(A et B sont indépendants si et seulement) $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)\overset{\text{def}}{=}P(A)\times P(B)$

$\Leftrightarrow$ $P(B)=P(A)\times P(B)+P(\overline{A}\cap B)$

$\Leftrightarrow$ $P(\overline{A}\cap B)=P(B)(1-P(A))=P(B)\times P(\overline{A})$

$\overline{A}$ et B sont indépendants.

ii) même chose en échangeant A et B : B et A sont indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{B}$ et A indépendants.

iii) $\overline{A}$ et B sont indépendants d'après i), donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants d'après ii).

Exemple :

Lors d'un week-end prolongé, Bison futé annonce qu'il y a 42 % de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63 % sur l'autoroute A7.
Soit A l'événement « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6 ».
Soit B l'événement « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7 ».
On suppose que les événements A et B sont indépendants.

Alors les événements $\overline{A}$ et B sont également indépendants et on a :

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B) = 0{,}58 \times 0{,}63 = 0{,}3654$$

On peut interpréter ce résultat :

La probabilité de tomber dans un bouchon A7 mais pas A6 est égale à $36{,}54\,\%$.