Produit scalaire dans l'espace.

1) Définitions :

Un scalaire est un nombre réel ou complexe, et s'oppose à la notion de vecteur.

Définition 1 : Le produit scalaire dans l'espace se définit de la même manière que dans le plan.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ est le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini d'une des façons suivantes :

Définition 1 : dans un repère **orthonormal** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

Définition 2 : dans un repère **orthonormal** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ ou en notation matricielle : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$

Définition 3 : dans un repère **orthonormal** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ où $(\vec{u},\vec{v})$ désigne l'angle orienté des vecteurs.

Remarques :

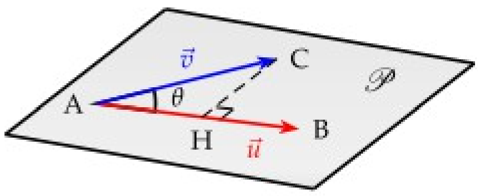
Le signe du produit scalaire est celui de $\cos(\vec{u},\vec{v})$ dans la définition 3.

On écrira $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$ pour les carrés scalaires.

On peut encore utiliser la définition du produit scalaire avec la **projection orthogonale** :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

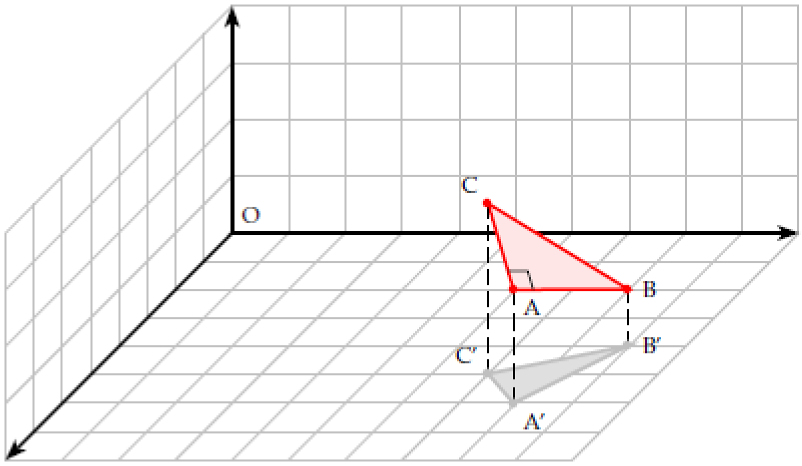


Exercice n°1 : On donne $A(6,8,2)$, $B(4,9,1)$ et $C(5,7,3)$ dans un repère orthonormal.

1) Déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

2) Les points A, B et C se projettent orthogonalement en A', B' et C' sur le plan (xOy) d'équation $z=0$.

a) Déterminer les coordonnées des points A', B' et C'.
b) Déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$.
c) Que constatez-vous ?



2) Propriétés du produit scalaire et orthogonalité :

Propriété 1 : Le produit scalaire est :

commutatif : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
distributif par rapport à l'addition : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
linéaire : $(\alpha\,\vec{u})\cdot\vec{v}=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(\alpha\,\vec{v})$

deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**, alors :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire

Remarque : Le vecteur nul $\vec{0}$ est par convention orthogonal à tous vecteurs de l'espace.

Exercice n°2 : On donne $A(6,8,2)$, $B(4,9,1)$ et $C(5,7,3)$.

1) Déterminer le réel α pour que $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

2) On donne $A(2,-5,1)$ et $B(0,2,6)$.

Montrer que la droite (d) passant par $C(-2,3,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j}$ est orthogonale à la droite (AB).

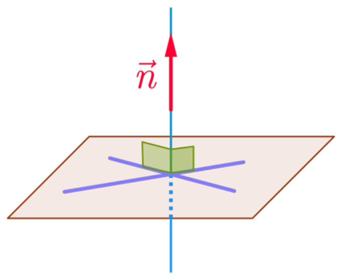
3) On donne $A(2,0,2)$, $B(4,0,0)$, $C(1,-2,1)$, $D(-1,1,0)$ et $E(1,-1,2)$.

Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan ABC.

3) Équation cartésienne d'un plan :

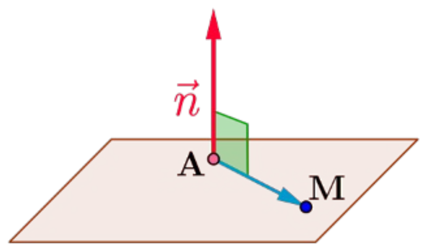
Définition 2 : Vecteur normal à un plan.

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (P) si et seulement si toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan (P).



Propriété 2 : Définition d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal.

Le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Remarque :

Pour définir correctement un plan, on a maintenant le choix :

- soit on se donne un point et deux vecteurs non colinéaires
- soit on se donne un point et un vecteur normal

Propriété 3 : Équation cartésienne d'un plan.

L'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont trois réels **non tous nuls**.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est alors un **vecteur normal** au plan.

Remarque : L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.
On peut la multiplier par tous réels non nuls.

Exercice n°3 : Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1,-2,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}$.

Exercice n°4 : Un plan (P) est dirigé par les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\\6\end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal au plan (P).

4) Orthogonalité dans l'espace :

Propriété 4 : Droite orthogonale à un plan.

Une droite Δ est orthogonale à un plan (P) si et seulement si il existe deux droites sécantes de (P) perpendiculaires à Δ.

preuve :

C.N. : Si Δ est orthogonale à (P) alors elle est orthogonale à toute droite de (P), donc à deux droites sécantes de (P).

C.S. : Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de Δ, puis $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs des deux droites sécantes du plan (P). On a alors $\vec{u_1}\cdot\vec{n}=\vec{u_2}\cdot\vec{n}=0$.

Et comme $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires, le couple $(\vec{u_1},\vec{u_2})$ forme une base du plan (P), donc tout vecteur directeur $\vec{w}$ d'une droite contenue dans le plan (P) s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de la forme $\vec{w} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$.

Alors $\vec{w} \cdot \vec{n} = \alpha\vec{u}_1 \cdot \vec{n} + \beta\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$ d'après les propriétés du produit scalaire, donc la droite Δ est orthogonale à toute droite de (P), donc au plan (P).

Définition 3 : Plans perpendiculaires, ou orthogonaux.

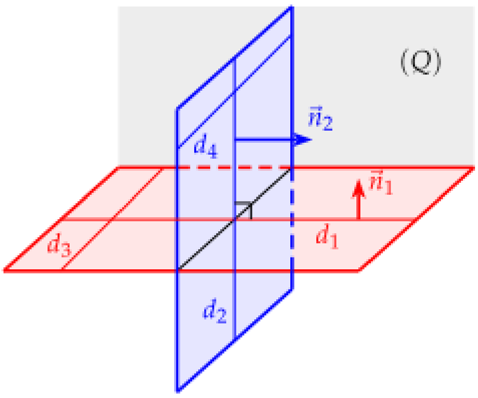
Deux plans (P_1) et (P_2) de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires ou orthogonaux, si et seulement si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Remarque :

La notion d'orthogonalité de deux plans est moins souple qu'avec deux droites.

Par exemple :

- si (P_1) est orthogonal à (P_2), une droite (d_3) de (P_1) peut être parallèle à une droite (d_4) de (P_2)
- si un plan (Q) est perpendiculaire à deux plans (P_1) et (P_2), les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas nécessairement parallèles entre eux



Exercice n°5 :

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(\sqrt{2}, -2, 5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) On considère le plan (P) : $2x - y + 3z = 0$ et le point $A(3, -1, 0)$.

Donner une équation cartésienne du plan (Q) parallèle au plan (P) et passant par A.

3) On donne $A(-1, 1, 0)$ et $B(2, 1, -1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur au segment $[AB]$.