La démonstration par récurrence.

Le principe de la démonstration par récurrence repose exclusivement sur les entiers naturels.

En effet, l'ensemble des entiers naturels possède une propriété qu'il est le seul à avoir et qui permet de faire ce raisonnement déductif.

L'existence de l'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots,n-1,n,n+1,\ldots\}$ est un axiome des mathématiques.

Cet **axiome** comprend les principes suivants :

- on peut toujours **comparer** deux entiers avec la **relation d'ordre** $\leqslant$
- **0** est le **plus petit entier** naturel pour cet ordre
- on peut faire des **additions** et **0** est l'**élément neutre** pour cette addition
- on peut faire des **multiplications** et **1** est l'**élément neutre** pour cette multiplication
- tout entier naturel n possède un **successeur** $n+1$
- l'addition et la multiplication **conservent l'ordre** dans $\mathbb{N}$

Un autre **axiome fondamental** concernant l'ensemble $\mathbb{N}$:

Toute partie A non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Il est important de s'assurer que la partie A n'est pas vide, avant de pouvoir en déduire qu'elle possède un plus petit élément. En affirmant qu'il existe un plus petit élément dans un ensemble qui n'en contient aucun, on aboutirait certainement à des absurdités.

Il est à noter que ce plus petit élément appartient encore à A. Donc si les éléments de A possèdent tous une propriété particulière, alors le plus petit élément la possède également.

C'est cet axiome qui permet de prouver que la méthode de démonstration par récurrence est cohérente. Cet axiome est également à la base de l'existence de la division euclidienne et donc de toute l'arithmétique.

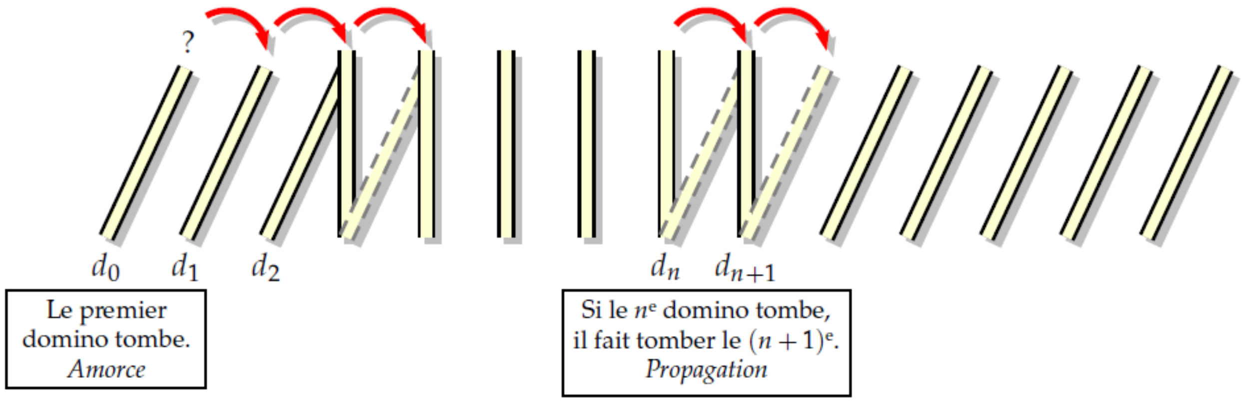
Remarque :

On peut également envisager des soustractions dans $\mathbb{N}$, ne serait-ce que pour pouvoir écrire des nombres précédents un entier donné, expressions comme $n-2$, $n-1$, n, $n+1$.

Mais il faut alors vérifier que les prédécesseurs sont encore des nombres entiers, c'est-à-dire que l'entier n est suffisamment grand, pour ne pas risquer de raisonner sur des entiers avec des écritures mathématiques qui ne représentent pas des entiers !

1) Effet domino :

Le raisonnement par récurrence s'apparente à la théorie des dominos. On considère une file de dominos espacés régulièrement.



- Le premier domino d_0 tombe. C'est l'amorce.
- Les dominos sont suffisamment proches pour que si l'un des dominos d_n tombe le suivant d_{n+1} tombe également. C'est la propagation.

On peut alors conclure que tous les dominos de la file tombent les uns après les autres.

Transposant cet effet domino à une propriété mathématique :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0,3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$

Soit la propriété (P) : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$

- Le premier domino tombe :
  $u_0 = 0,3$ donc $0 < u_0 < 1$. La propriété est amorcée.
- Si l'un des dominos tombe le suivant tombe également :
  si $0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}u_n < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} < 1.$
  On a ainsi $0 < \frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$. La propriété se propage.

Comme le premier domino est tombé et que les autres tombent par propagation, tous les dominos tombent et donc la propriété est bien vérifiée pour tout entier naturel.

2) Intérêt du raisonnement par récurrence :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$

On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement u_n en fonction de n. À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux.
Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour dégager une relation.

Calculons les premiers termes :

$$\begin{array}{ll}
u_1 = 2u_0 + 1 = 1 & (2^1 - 1) \\
u_2 = 2u_1 + 1 = 3 & (2^2 - 1) \\
u_3 = 2u_2 + 1 = 7 & (2^3 - 1) \\
u_4 = 2u_3 + 1 = 15 & (2^4 - 1) \\
u_5 = 2u_4 + 1 = 31 & (2^5 - 1)
\end{array}$$

La suite (u_n) semble obéir à une loi toute simple : en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation nécessairement vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.
Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?
Notons (P) la propriété, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$
Supposons un instant, que pour un certain entier n, on ait effectivement la propriété $u_n = 2^n - 1$

Alors, on aurait : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$
Ce qui correspond à la propriété (P) à l'odre $n + 1$.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang n alors elle l'est également au rang suivant $n + 1$. On dit que la propriété (P) est *héréditaire*.

On a vérifié que la propriété (P) était vraie au rang 0, 1, 2, 3, 4, 5. On dit que la propriété (P) est *initialisée*. Mais comme elle est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc. Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang n.

3) Axiome de récurrence :

Propriété 1 : Soit $\left(P_n\right)$ une propriété dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$.

- Si la propriété est initialisée à partir d'un rang n_0 :

P_{n_0} est vraie

- Si la propriété est héréditaire à partir du rang n_0 :

pour tout $n \geqslant n_0$, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie

Alors la propriété $\left(P_n\right)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

- Prouver que la propriété est initialisée.
- Prouver que la propriété est héréditaire.

Si on montre ces deux phases, la propriété est démontrée pour tout entier naturel supérieur ou égal au rang de l'initialisation.

La phase d'hérédité comporte deux temps :

- on écrit d'abord l'hypothèse de récurrence (H.R.) :
  je suppose que l'affirmation $\left(P_n\right)$ est vraie pour un seul entier n que je choisis au hasard supérieur ou égal à l'indice de l'initialisation
- je prouve en me servant de cette hypothèse que l'affirmation $\left(P_{n+1}\right)$ est alors vraie

Pour savoir si l'on est bien arrivé à montrer que l'affirmation $\left(P_{n+1}\right)$ est vraie, il faut commencer par écrire la traduction mathématique de $\left(P_{n+1}\right)$ au brouillon.

4) Inégalité de Bernoulli :

Propriété 2 : Soit un réel a strictement positif.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \ (1+a)^n \geqslant 1+na$

preuve : démonstration à connaître

J'appelle (P_n) la proposition suivante : $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Je vais démontrer par récurrence sur n que (P_n) est vraie pour tout entier n .

<u>Initialisation</u> :

$(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ donc (P_0) est vraie.

<u>Hérédité</u> :

<u>H.R.</u> : je suppose que (P_n) est vraie pour **un** entier $n \geqslant 0$ **fixé** : $(1+a)^n \geqslant 1+na$

(*au brouillon* : (P_{n+1}) c'est $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a = 1+na+a$)

$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n$
comme $(1+a)^n \geqslant 1+na$ par H.R. et $(1+a) \geqslant 0$
alors $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+a)(1+na)$
soit $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a+na^2$
mais $na^2 \geqslant 0$ donc $1+na+a+na^2 \geqslant 1+na+a$
et donc finalement $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$ donc (P_{n+1}) est vraie

Exercices :

1) Montrer que pour tout entier n , $10^n - 1$ est un multiple de 9 .

2) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n < 2$.

b) Prouver que la suite est décroissante

5) Exemples de situations amenant à une conclusion erronée :

Premier exemple :

la propriété est héréditaire mais elle n'est jamais initialisée.

Pour tout entier n, 2^n est multiple de 3.

Deuxième exemple :

la propriété est initialisée jusqu'à un certain rang, mais elle n'est pas héréditaire.

Pour tout entier n, le nombre $n^2 - n + 41$ est un nombre premier.

En effet, on peut vérifier que cette affirmation est valable pour tous les entiers jusqu'à $n = 40$, mais que pour $n = 41$ on obtient un nombre qui n'est pas premier.

Exercice : On considère la propriété suivante :

$$(P_n) \ : \ 2^n > 2n$$

1) Conjecturez pour quels entiers n la propriété (P_n) est vraie.

2) Démontrer cette conjecture par récurrence.

6) Complément : démonstration du théorème de récurrence.

On va utiliser l'axiome suivant de $\mathbb{N}$, à savoir :

toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On suppose que les hypothèses du théorème de récurrence sont vérifiées, à savoir :

P_0 est vraie
$P_n \Rightarrow P_{n+1}$ pour tout entier n (hérédité à tous les étages)

On doit alors prouver que P_n est vraie pour tous les entiers n.

Pour cela, nous allons résonner par l'absurde :

- on garde nos hypothèses, mais on suppose que la conclusion à démontrer est fausse, c'est-à-dire qu'il existe au moins un entier n pour lequel P_n est fausse
- on en déduit par un raisonnement logique une contradiction

preuve :

Soit E l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels l'affirmation P_n est fausse" :
On peut écrire la définition de l'ensemble E ainsi : $E = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ P_n \text{ est fausse} \}$.

On suppose que E est non vide, début du raisonnement par l'absurde.

Alors E possède un plus petit élément k d'après l'axiome de $\mathbb{N}$.
Et donc l'affirmation P_k est fausse puisque ce plus petit élément est dans E.

Que peut-on alors dire de $k-1$?

Tout d'abord, c'est bien un entier naturel, car P_0 est vraie, donc $k \geqslant 1$ et $k-1 \geqslant 0$.

Ensuite, $k-1$ n'appartient pas à E puisque l'entier k est le plus petit de E.

Ce qui signifie que P_{k-1} n'est pas faux, donc que P_{k-1} est vraie.

Alors, d'après les hypothèses du théorème de récurrence, P_k est également vraie.

Ce qui est impossible.

On en déduit que E est nécessairement vide, ce qui prouve la conclusion du théorème.