Vecteurs et repères dans l'espace.

1) Vecteurs de l'espace :

La notion de vecteurs dans le plan s'étend de manière naturelle à l'espace.

a) Un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est donc défini par :

- une direction : la droite (AB)
- un sens : de A vers B
- une norme ou longueur notée : $\|\vec{u}\| = AB$

b) **Vecteurs égaux** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

c) La **relation de Chasles** est encore vérifiée : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

La construction de la somme de deux vecteurs
de même origine s'effectue en utilisant un parallélogramme.

d) **Produit d'un vecteur par un scalaire** : $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\vec{v}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$
- $\vec{v}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et un sens contraire si $\lambda < 0$
- $\|\vec{v}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$

e) **Colinéarité** :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Le vecteur nul étant colinéaire à tout vecteur de l'espace.

De la colinéarité on déduit :

- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

Exercice n°1 : Soit un tétraèdre $ABCD$. On considère les points I, J, K et L définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

Faire une figure, puis montrer que IJKL est un parallélogramme.

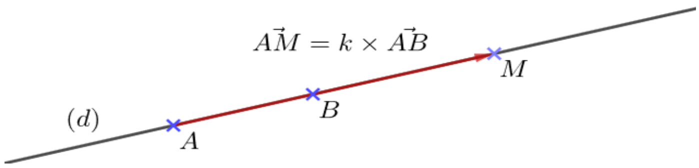
2) Droites de l'espace :

Propriété 1 : Une droite est engendrée par **un point** et **un vecteur non nul**.

La droite $d(A,\vec{u})$ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k \times \vec{u}$.
Le nombre k est alors l'abscisse du point $M(k)$ dans le repère $(A,\vec{u})$ de la droite (d).

Une droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

<u>notation affine</u> (hors programme) : $M = A + k\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$.



Exercice n°2 : Soit (d) la droite passant par $A(2,-5,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$.

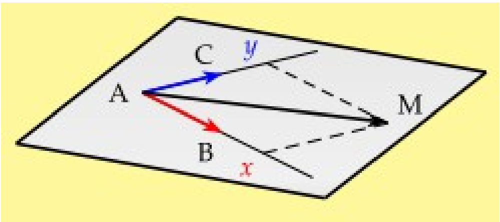
Exprimer les coordonnées (x,y,z) d'un point M de cette droite en fonction de son abscisse k dans le repère $(A,\vec{u})$ de cette droite.

3) Plans de l'espace :

Propriété 2 : Un plan est engendré par **un point** et **deux vecteurs non colinéaires**.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, pour tous réels x et y.



$(x;y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ du plan (ABC).

Remarque :

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC), ou forment une **base** pour le plan (ABC).

Exercice n°3 : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires.

1) Montrer que les points $A(1;-2;3)$, $B(4;4;-3)$ et $C(-1;-6;7)$ sont alignés.
Peut-on définir un plan à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
2) Montrer que les points $D(1;2;-3)$, $E(3;-2;4)$ et $F(-3;10;5)$ définissent un plan.

Propriété 3 :

Si deux plans ont le même couple de vecteurs directeurs $(\vec{u},\vec{v})$, alors ces deux plans sont parallèles.

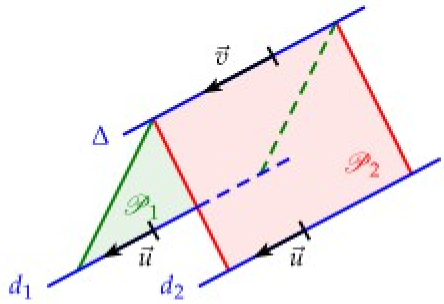
Preuve : En effet, si A est un point du plan (P_1) et B un point du plan (P_2), alors la droite $d(A,\vec{u})$ de (P_1) est parallèle à la droite $d(B,\vec{u})$ de (P_2), donc elle est parallèle au plan (P_2). De même, la droite $d(A,\vec{v})$ est parallèle au plan (P_2).
Le plan (P_1) contient deux droites sécantes parallèle au plan (P_2), donc $(P_1)//(P_2)$.

Théorème du Toit :

Soients d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans distincts (P_1) et (P_2).

Si ces deux plans sont sécants suivant une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle aux deux droites d_1 et d_2.

preuve : par l'absurde.



- On suppose que Δ n'est pas parallèle à d_1, ce qui entraîne que Δ n'est pas parallèle à d_2.
- On appelle $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ.
- Comme d_1 et d_2 sont parallèles, on appelle $\vec{u}$ leur vecteur directeur.

  - Comme Δ n'est pas parallèle à d_1, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc, comme Δ est contenue dans (P_1), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de (P_1).
  - Comme Δ est aussi contenue dans (P_2), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan (P_2).
  - On en déduit que les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse qu'ils sont sécants.
  - Δ est donc bien parallèle à d_1 et d_2.

4) Vecteurs coplanaires :

Définition 1 :

Trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si l'on peut exprimer l'un d'entre eux en fonction des deux autres.

Par exemple, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si :

il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$.

Remarque :

Deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et toutes leurs combinaisons linéaires définissent un même plan, en partant d'un même point de l'espace.
Pour sortir de ce plan, il faut utiliser un vecteur non coplanaire aux deux autres, c'est-à-dire non exprimable à partir d'une de leurs combinaisons linéaires.

Exercice n°4 : Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}7\\16\\-9\end{pmatrix}$ sont coplanaires.

Propriété 4 : Les points A , B C et D sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$.

Remarque :

Dans le plan, deux points sont toujours alignés mais pas toujours trois, et dans l'espace, trois points sont toujours coplanaires mais pas toujours quatre.

Ainsi, trois points non alignés définissent un plan, comme quatre points non coplanaires définissent un espace.

Exercice n°5 : Vérifier si trois vecteurs sont coplanaires.

1) Montrer que les points $A(2;0;1)$, $B(1;-2;1)$, $C(5;5;0)$ et $D(-3;-5;6)$ sont coplanaires.

2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-13\\26\\-10\end{pmatrix}$ ne sont pas coplanaires.

5) Repères de l'espace :

Propriété 5 : Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace est constitué d'un point origine O et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Tout point M de l'espace est alors défini par : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ où $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$.

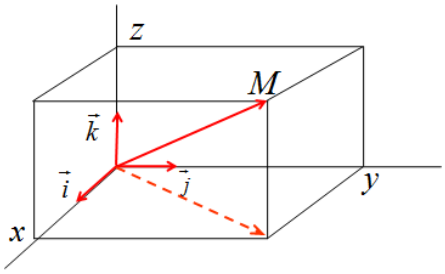
Les trois réels uniques $(x;y;z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On les appelle respectivement **abscisse x**, **ordonnée y** et **cote z**.

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit **orthonormal** si et seulement si :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

et

$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.



Trois vecteurs non coplanaires forment donc une **base de l'espace**.

<u>Comme dans le plan, on a les relation suivantes</u> :

1) Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

2) Si I est le milieu de [AB] alors $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

3) Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors, dans un repère orthonormal : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Exercice n°6 :

Soient les points $A(6;8;2)$, $B(4;9;1)$ et $C(5;7;3)$ dans un repère orthonormal.
Montrer que le triangle ABC est rectangle puis donner les coordonnées du point D, centre de son cercle circonscrit.

6) Représentation paramétrique d'une droite :

Propriété 6 : On considère une droite $(\Delta)(A,\vec{u})$ passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Alors la droite (Δ) est caractérisée par un système d'équations, appelé **une représentation paramétrique de la droite**, qui est de la forme :

$$(\Delta)\ :\ \begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

preuve :

M appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$.

On peut encore écrire cela en utilisant la notation affine suivante, M = A + $t\,\vec{u}$, qui représente bien la réalité.

En passant aux coordonnées cela donne : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ta\\tb\\tc\end{pmatrix}$ pour un réel t.

Remarques :

- Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t\in\mathbb{R}$ par $t\in]-\infty;\alpha]$ ou $t\in[\alpha;+\infty[$;
- Pour un segment il suffit de remplacer $t\in\mathbb{R}$ par un intervalle fermé $[\alpha;\beta]$.

Exercice n°7 :

1) Donner une représentation paramétrique de la droite $d\left(A(2;1;-1);\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

2) On donne $A(-2;1;0)$ et $B(2;3;1)$.
Donner une représentation paramétrique des ensembles suivants :

a) la droite (AB) b) la demi-droite $[AB)$

c) le segment $[AB]$ d) la demi-droite $[BA)$

3) Une droite possède une infinité de représentation paramétrique différentes, puisqu'on peut partir de plusieurs points et utiliser tout vecteur colinéaire à un vecteur directeur de la droite.

Alors les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

(D_1) : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et (D_2) : $\begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2 \\ z = 9s - 5 \end{cases}$ pour $s \in \mathbb{R}$

4) On donne $A(1;4;-2)$ et $B(2;-3;4)$ dans un repère quelconque $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) et du plan (xOy)

7) Représentation paramétrique d'un plan :

Propriété 6 : On considère un plan (P) défini par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

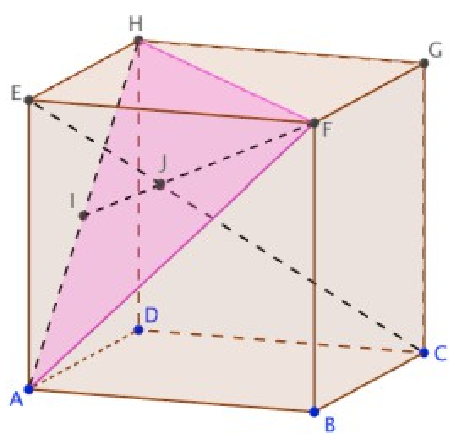
Alors le plan (P) est caractérisée par une représentation paramétrique de la forme :

$$(P) \ : \ \begin{cases} x = x_A + at + \alpha s \\ y = y_A + bt + \beta s \\ z = z_A + ct + \gamma s \end{cases}, \text{ pour } (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque :

Contrairement aux droites de l'espace, les plans possèdent une équation cartésienne, c'est pourquoi on n'utilise pas les représentations paramétriques des plans.

Exercice n°8 : ABCDEFGH est un cube.



Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point tel que $\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}$.

Démontrer que les points E, J et C sont alignés.

Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont non coplanaires, donc il est possible de décomposer les vecteurs $\vec{EJ}$ et $\vec{EC}$ en fonction de ces trois vecteurs.