Limites des Suites Numériques

Principe :

On s'intéresse essentiellement au comportement asymptotique des suites, c'est-à-dire à leur comportement lorsque la variable entière n tend vers l'infini.

1) **Préambule : Les intervalles.**

Pour étudier la limite d'une suite on utilise très fréquemment la notion d'intervalle.
Les propriétés des fonctions sont très souvent valables uniquement sur des intervalles.

Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ **sans interruption**.

Plus rigoureusement, soit une partie I de $\mathbb{R}$ (on écrit aussi $I \subset \mathbb{R}$) est un intervalle si :

pour tout réel a et b, si $a \in I$ et $b \in I$ alors $[a;b] \subset I$

Par exemple, $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ n'est pas un intervalle, comme $\mathbb{R}-\{a\} =]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$.

En général, la réunion de deux intervalles n'est pas un intervalle.

Il existe des intervalles **ouverts** et des intervalles **fermés**.

Les intervalles fermés sont de la forme : $]-\infty;a]$; $[b;+\infty[$ ou $[a;b]$.

Les intervalles ouverts sont de la forme : $]-\infty;a[$; $]b;+\infty[$ ou $]a;b[$.

<u>Quelques notations à connaître</u> :

Notations	Écriture sous forme d'intervalles	Commentaires
$\mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$	Intervalle ouvert
$\mathbb{R}^*$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	N'est pas un intervalle
$\mathbb{R}^+$	$[0;+\infty[$	Intervalle fermé
$\mathbb{R}^-$	$]-\infty;0]$	Intervalle fermé
$\mathbb{R}_+^*$	$]0;+\infty[$	Intervalle ouvert
$\mathbb{R}_-^*$	$]-\infty;0[$	Intervalle ouvert

Quelques intervalles **ouverts** importants pour étudier la limite d'une suite :

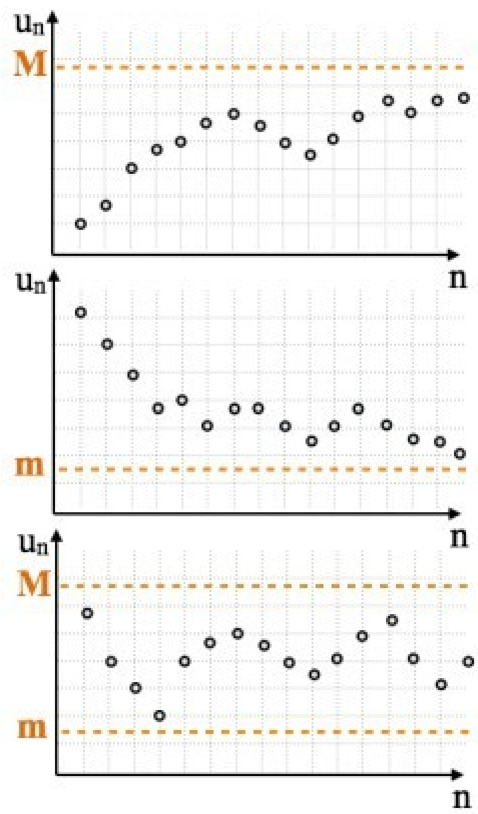
Les intervalles de la forme $]A\,;+\infty[$ qu'on appelle des **voisinages de** $+\infty$.

Les intervalles de la forme $]-\infty\,;B[$ qu'on appelle des **voisinages de** $-\infty$.

L'intervalle ouvert **centré** en l qui est de la forme $]l-r\,;l+r[$ qu'on appelle un **voisinage de** l.

2) Suite minorées, majorées et bornées :

Définitions :



- S'il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$ pour tout entier n, alors on dit que la suite (u_n) est **majorée** par M.

exemple 1 : La suite $u_n = 3 - 2n^2$ est majorée par 3.

- S'il existe un réel m tel que $u_n \geqslant m$ pour tout entier n, alors on dit que la suite (u_n) est **minorée** par m.

exemple 2 : La suite $v_n = n^2 + 7$ est minorée par 7.

- Si la suite (u_n) est minorée et majorée, on dit qu'elle est **bornée**.

exemple 3 :

La suite $w_n = 3\sin(n) - 1$ est bornée par -4 et 2.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $-4 \leqslant w_n \leqslant 2$.

3) Limite d'une suite :

a) Limite infinie :

Définition :

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$, où a est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$, si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;b[$, où b est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

figure :

Exemple : $u_n=n^2$ alors soit un réel positif a quelconque.
Alors $u_n>a \Leftrightarrow n>\sqrt{a}$. Donc dès que $n>\sqrt{a}$ on a $u_n\in]a\,;+\infty[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
(En réalité, il faut que $n\geqslant E\left(\sqrt{a}\right)+1$).

b) Limite finie :

Définition :

On dit que la suite (u_n) admet le réel l pour limite, si tout intervalle ouvert contenant l, de la forme $]l-r\,;l+r[$, où r est un nombre réel positif, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$.

figure

Exemple : La suite $v_n=2+\dfrac{1}{n^2}$ a pour limite le nombre 2.

En effet, $v_n\in]2-r\,;2+r[$ dès que $n>\dfrac{1}{\sqrt{r}}$.

c) Exemples de suites sans limite :

Une suite ne possède pas forcément une limite : $u_n=(-1)^n$ et $v_n=\sin(n)$ par exemples.

Définition : Suite convergente ou divergente

Une suite est dite **convergente** si elle admet une **limite finie**.

Une suite non convergente est dite **divergente**.

Propriété : Unicité de la limite

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

Preuve :

On suppose $l<l'$ par exemple, et on prend deux intervalles I et I' tels que $I\cap I'=\emptyset$
On aboutit alors à une contradiction.

d) Limites des suites usuelles :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} n^k=+\infty$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k}=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Algorithme à connaître :

On considère une suite croissante (u_n) de limite $+\infty$.
On choisit un nombre A au hasard, et on cherche le rang à partir duquel $u_n > A$:

Entrées :

Donner un nombre A

Initialisation :

I prend la valeur du premier indice de la suite
U prend la valeur du premier terme de la suite

Traitement :

Tant que $U < A$:
    U prend la valeur du nouveau U
    I prend la valeur I+1
Fin du tant que

Sortie :

Afficher I

Exercice : Écrire et programmer cet algorithme sur la calculatrice, pour la suite :

(u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n^2+u_n$.

Alors (u_n) est croissante.

On obtient :

$A=10$	I=2
$A=100$	I=3
$A=1000$	I=4
$A=10^9$	I=5

4) **Opérations sur les limites** :

a) Limite d'une somme :

Limite de (u_n)	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de (v_n)	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de (u_n+v_n)	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée F.I.**

b) Limite d'un produit :

Limite de (u_n)	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de (v_n)	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de $(u_n \times v_n)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

c) Limite d'un quotient :

- Si la limite du dénominateur n'est pas nulle :

Limite de (u_n)	l	$l>0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de (v_n)	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

- Si la limite du dénominateur est nulle :

Limite de (u_n)	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
Limite de (v_n)	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Exemples :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2n^2+3n-3\right) \quad \lim_{n\to+\infty}\left(2n^2-3n+4\right) \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-3}{2n-4}\right) \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-5}{2n^2-4n-3}\right)$$

Exercices : Déterminer les limites des suites données ci-dessous :

$$u_n=-3n^2-3n+6 \qquad v_n=-2n^2+3n+7 \qquad w_n=\frac{4-3n}{7n+9}$$

$$a_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n} \qquad b_n=\frac{5-\frac{1}{n}}{2n^2+3} \qquad c_n=\frac{10n^2-3}{5n+2}-2n \qquad d_n=n-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$e_n=\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n}$$

5) Limites et comparaison :

Théorème 1 : Suite minorée par une suite de limite $+\infty$.

On considère deux suites (u_n) et (v_n).

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty \\ u_n \geqslant v_n \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Preuve à connaître : On va montrer que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Soit A un réel quelconque.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang n_1 : donc pour tout $n \geqslant n_1$ on a $v_n \in]A;+\infty[$.

Or $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_2 : donc pour tout $n \geqslant n_2$ on a $u_n \geqslant v_n$.

Notons n_0 le plus grand des deux entiers n_1 et n_2 ;

alors $\forall\, n \geqslant n_0$ on a $u_n \geqslant v_n \geqslant A$ donc $\forall\, n \geqslant n_0$ $u_n \in]A;+\infty[$. C.Q.F.D.

Exemple : $u_n=n+(-1)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$(-1)^n \geqslant -1$ pour tout entier n donc $u_n \geqslant n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)=+\infty$, donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Théorème 2 : Suite majorée par une suite de limite $-\infty$

On considère deux suites (u_n) et (v_n).

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty \\ u_n \leqslant v_n \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Exemple : $v_n = n(-3+\cos n)+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ donc $-4 \leqslant -3+\cos n \leqslant -2$ et $-4n+1 \leqslant v_n \leqslant -2n+1$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2n+1) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Théorème 3 : Théorème des gendarmes.

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l \\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

Exemple : $w_n = 1 + \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier n non nul

donc $1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$.

Exercice : Montrer que les suites suivantes sont convergentes et déterminer leur limite.

1) (b_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $b_n = \dfrac{n+\cos n}{n}$;

2) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6) **Limites des suites arithmétiques et géométriques** :

a) Suite arithmétique :

Considérons (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r.

Alors $\forall n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n + r$ et aussi $\forall n \geqslant p$ on a $u_n = u_p + (n-p) \times r$.

- Si $r=0$ alors (u_n) est constante et $u_n = u_p \quad \forall n \geqslant p$
- Si $r>0$ alors (u_n) est croissante, et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$;
- Si $r<0$ alors (u_n) est décroissante, et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$.

Remarques :

- les suites arithmétiques ont toutes une expression de la forme $u_n = a\,n + b$ où a est la raison de la suite ;
- elles correspondent à des évolutions linéaires, avec un nuage de points alignés sur la droite d'équation $y = a\,x + b$. La **variation absolue** u_{n+1} - u_n est constante.

b) Suites géométriques :

Propriété : Limite de la suite géométrique (q^n) des puissances du nombre q.

- Si $q \leqslant -1$ alors (q^n) n'admet pas de limite ;
- Si $-1 < q < 1$ ou encore $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 0$;
- Si $q=1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 1$;
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = +\infty$.

Preuve pour $q > 1$: ROC à connaître

Si $q > 1$ alors on peut écrire $q = 1 + a$ avec $a > 0$, puis on utilise l'inégalité de Bernoulli :

on a donc $q^n \geqslant 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = +\infty$.

Conséquences sur les limites possibles d'une suite géométrique :

Considérons (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q.

Alors $\forall\, n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = q\, u_n$ et aussi $\forall\, n \geqslant p$ on a $u_n = u_p q^{n-p}$

Si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a :

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$;
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$;
- Si $|q| < 1$ alors (u_n) converge vers 0 ;
- Si $q = 1$ alors (u_n) est stationnaire et converge vers u_0 ;
- Si $q \leqslant -1$ alors (u_n) diverge car elle n'admet pas de limite.

Exemples : Convergence des suites :

$$a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{7}\right)^n \qquad b_n = \frac{1}{-3 \times 2{,}2^n} \qquad c_n = 1 + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Remarques :

- les suites géométriques ont toutes une expression de la forme $u_n = a\, b^n$ où b est la raison de la suite.
- elles correspondent à des évolutions exponentielles, c'est-à-dire à **variation relative** constante d'un terme au suivant.

Exercice :

Calculer la **variation relative** d'une suite géométrique en fonction de sa raison.

7) Limites des suites minorées, majorées ou bornées :

Propriété :

> Soit (u_n) une suite **croissante** qui **converge** vers une **limite finie** l.
> Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant l$.

Preuve : Nous allons démontrer cette propriété **par l'absurde**.

Supposons qu'il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > l$.

Comme $u_p > l$, l'intervalle $I = \left]l-1\,;u_p\right[$ est un intervalle ouvert qui contient l.

Par hypothèse, $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ donc I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Mais la suite (u_n) est croissante, donc $u_n \geqslant u_p$ pour tout $n > p$ ce qui entraîne que $u_n \notin I \quad \forall n > p$.

Ces deux dernières affirmations sont contradictoires, donc l'hypothèse de départ ne peut être juste.

Conclusion : $u_p > l$ est impossible, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant l$.

Exercice : Écrire la propriété correspondante dans le cas d'une suite décroissante.

Propriété :

> Une suite convergente est bornée.

Remarque : La réciproque est fausse. Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Propriété : Contraposée de la propriété précédente.

> Une suite non bornée est divergente (soit non majorée, soit non minorée)

Exemple : La suite $u_n = (-1)^n \times n$ n'est pas bornée donc elle diverge.

Théorème : Théorèmes de convergence monotone.

- Une suite **croissante et majorée** est **convergente** ;
- Une suite **décroissante et minorée** est **convergente**.

Remarque :

Ces deux théorèmes sont très importants, car ils permettent de démontrer assez facilement qu'une suite est convergente. Par contre, ils ne permettent pas de déterminer cette limite.

Exemple : $u_n = \dfrac{n+3}{n+1}$ est positive donc minorée par 0.

Montrons qu'elle est décroissante. En effet, $u_n = \dfrac{n+1+2}{n+1} = 1 + \dfrac{2}{n+1}$ qui est manifestement décroissante puisque le dénominateur seul augmente.
Mais attention, on ne peut pas affirmer qu'elle converge vers 0.
D'ailleurs sa limite vaut 1.

Théorème : Conséquence des théorèmes précédents.

- Une suite **croissante** et **non majorée** diverge vers $+\infty$;
- Une suite **décroissante** et **non minorée** diverge vers $-\infty$.

Preuve : Soit $A>0$.

A partir d'un certain rang p on a $u_n>A$ et comme la suite est croissante alors $\forall n>p \quad u_n>A$ donc tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$ à partir du rang p, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, Exercice sur la convergence monotone :

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_{n+1}=u_n^{\;2}-2u_n+2$ et $u_\circ=\frac{3}{2}$.

1) Démontrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $1\leqslant u_n\leqslant 2$.

on peut essayer par récurrence ; pour l'hérédité, on utilise soit :

- en utilisant $u_{n+1}=u_n^{\;2}-2u_n+2$ et une manipulations des inégalités (rappeler les règles de manipulations des inégalités en interprétant les transformations par l'utilisation de fonctions, comme $x\rightarrow -2x$) ; cette méthode se montrera inefficace...
- en utilisant la forme canonique $u_{n+1}=\left(u_n-1\right)^2+1$, ce qui marche ! explications...

puis on peut essayer directement, en étudiant les variations du trinôme x^2-2x+2 et montrer que si $1\leqslant x\leqslant 2$ alors $1\leqslant f\left(x\right)\leqslant 2$; mais les variations sont une conséquence de la forme canonique...

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_{n+1}-u_n=\left(u_n-2\right)\left(u_n-1\right)$.

on aurait peut-être pu trouver nous-même la question 1) à partir de ce résultat !

3) Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

4) En déduire qu'elle est convergente.

5) Essayer de déterminer sa limite.