Continuité et dérivabilité d'une fonction

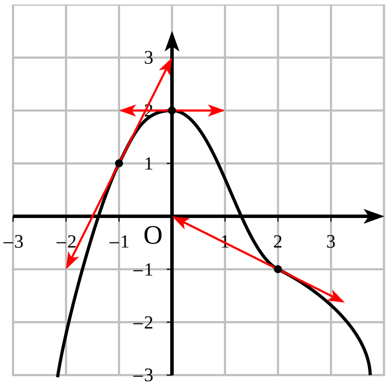
Interprétation graphique

EXERCICE 1

À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, donner les valeurs de :

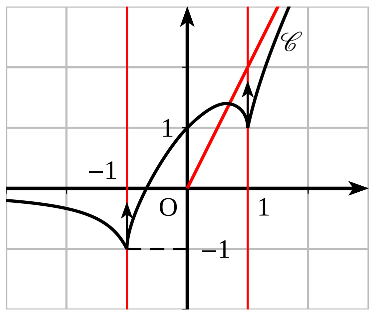
a) $f(0)$, $f(-1)$ et $f(2)$.

b) $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.

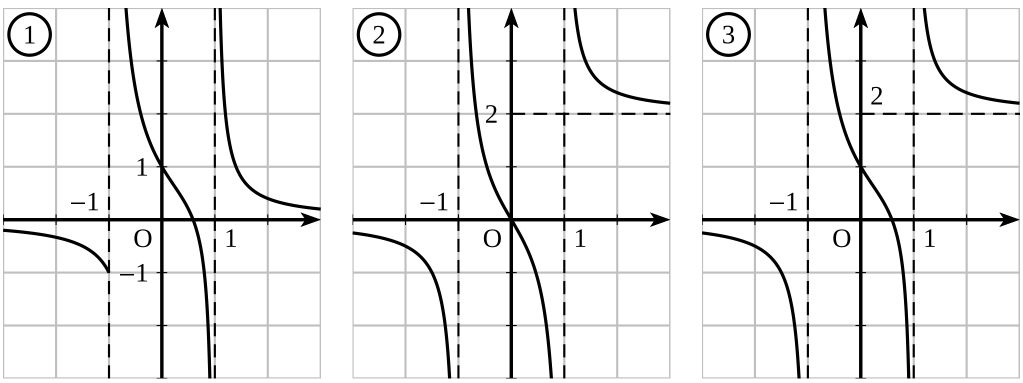


EXERCICE 2

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$



L'une des courbes ci-dessous est-elle susceptible de représenter f' ?

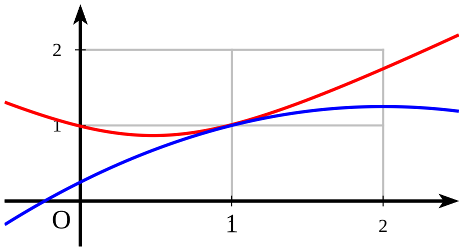


Exercice 3

À l'aide de la calculatrice, on a représenté les courbes d'équations :

$y_1 = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et

$y_2 = -\dfrac{1}{4}x^2 + x + \dfrac{1}{4}$



1) Que pouvez-vous conjecturer pour ces deux courbes au point d'abscisse 1 ?

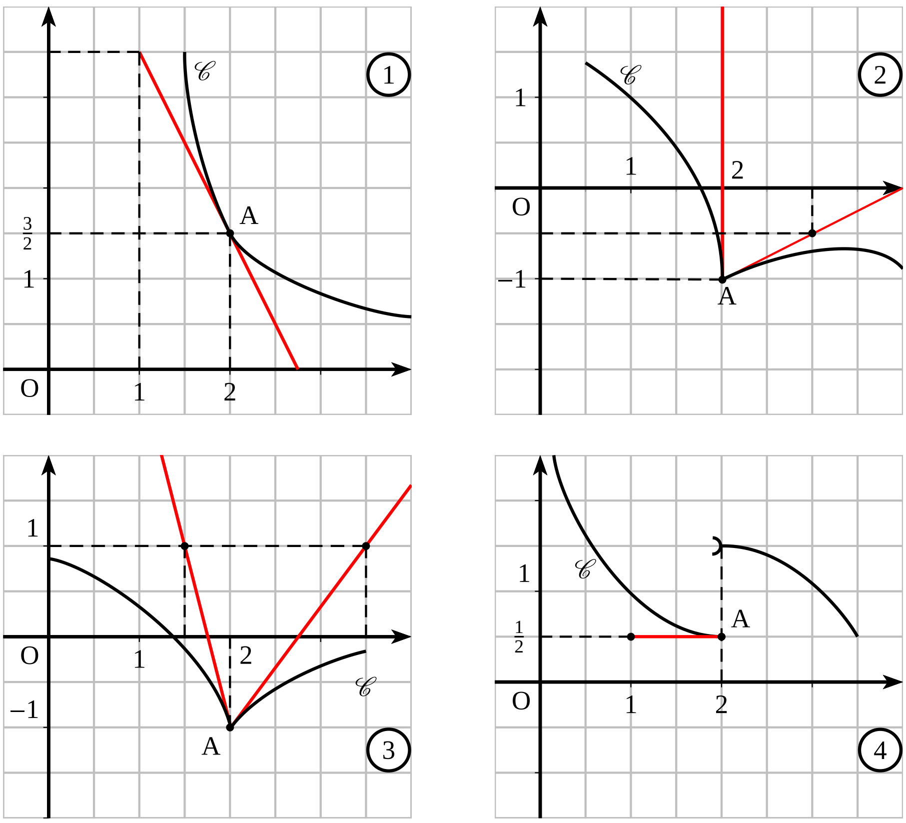
2) On pose, f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

Démontrer votre conjecture

Exercice 4

Dans chacun des cas, $\mathscr{C}$ est la courbe d'une fonction f. A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2. On a tracé les éventuelles tangentes ou demi-tangentes à $\mathscr{C}$ en A.



Dans chacun des 4 cas dites si la fonction f

- est continue 2. Si oui que vaut $f(2)$.
- est dérivable en 2. Si oui que vaut $f'(2)$.
  Si non, est-elle dérivable à gauche ? Est-elle dérivable à droite ? Préciser dans l'affirmative les nombres dérivées à droite et à gauche

Théorème des valeurs intermédiaires et fonction auxiliaire

Exercice 5

1) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

   a) Déterminer la fonction dérivée u' puis dresser le tableau de variation de la fonction u. (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini).

   b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

   c) A l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement de α à 10^{-3}. On donnera le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.

   d) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

   a) Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$

   b) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que : $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(1+x^3)^2}$

   c) Déterminer le signe de f' sur $]-1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

   d) En remarquant que $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$ montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$.

3) On donne les fonctions g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x(x-1)$ et $h(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

   a) Conjecturer avec une calculatrice les positions des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonction g et h. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-4;4]$ et $y \in [-5;5]$

   b) Montrer que $g(x) - h(x) = \dfrac{u(x)}{2x}$ puis à l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de $g - h$ sur $\mathbb{R}^*$

   c) En déduire la véracité de votre conjecture.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $I =]-2;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x^3}{x+2}$

a) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$

b) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = -\dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

c) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]-2;+\infty[$

d) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2\,;+\infty\,[$ puis montrer que $-1,5 < \alpha < 0$.

e) A l'aide de l'algorithme de dichotomie donner un encadrement à 10^{-4} de α ainsi que le nombre de boucles nécessaires pour l'obtenir.

Calculs de dérivées

EXERCICE 7

Dans chaque cas, donner le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée de la fonction f.

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{6}$
2) $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{x - 2}$
3) $f(x) = x - 6 + \dfrac{9}{x - 1}$ (factoriser f')
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 1}$ (factoriser f')
5) $f(x) = \left(x^2 + 2x - 3\right)^2$
6) $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)^3$
7) $f(x) = \cos 2x$
8) $f(x) = \sqrt{4 - x}$
9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{2 - x}}$
10) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

Équation de la tangente

EXERCICE 8

Dans chacun des cas, écrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse indiqué.

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x \quad a = 1$
2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} \quad a = 2$

EXERCICE 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$

1) Calculer les limites en -1 et en $+\infty$ et $-\infty$
2) Calculer la fonction dérivée de la fonction f.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f. On calculera les valeurs approchées des extremum de la fonction f à 10^{-2}.
4) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = -4x - 5$? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).
5) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $3x - 2y = 0$? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).
6) Vérifier ces résultats sur votre calculatrice. On prendra comme fenêtre $x \in [-15; 13]$ et $y \in [-20; 10]$ et comme graduation 5 sur les deux axes.

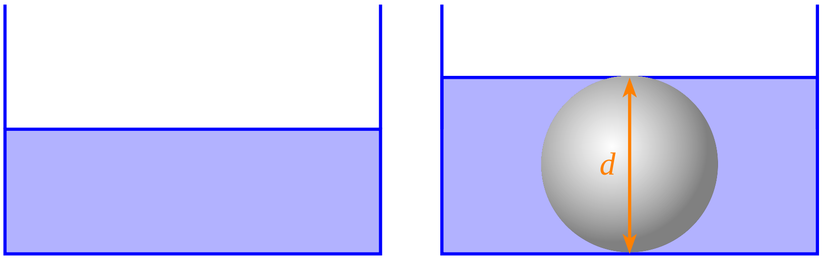
EXERCICE 10

Problème d'immersion

On dispose d'un récipient cylindrique de rayon 40 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d (en cm) et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille. Le but de cet exercice est de calculer le diamètre d de la bille.

On rappelle que

- le volume V d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à : $V = \pi r^2 h$
- le volume V d'une sphère de rayon r est égal à : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$



1) Vérifier que d est solution du système : $\begin{cases} 0 \leqslant d \leqslant 80 \\ d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0 \end{cases}$

2) f est la fonction sur $[0; 80]$ par : $f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000$

   a) Déterminer la dérivée de la fonction f. En déduire le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ;80].

   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique d sur $[0; 80]$.

   c) A l'aide de l'algorithme de dichotomie donner un encadrement à 10^{-2} de d ainsi que le nombre de boucles nécessaires pour l'obtenir.

Exercice 11

Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$

a) **Proposition 1 :** L'équation $x^3 - 3x + 3 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

b) **Proposition 2 :** La fonction f est dérivable sur $]\alpha; +\infty[$

c) **Proposition 3 :** Pour tout réel m positif ou nul l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$