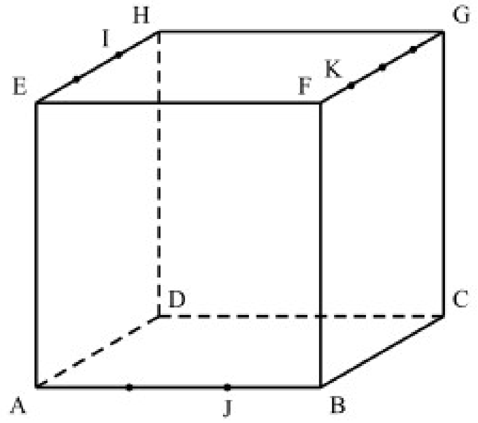
Géométrie dans l'espace.

Exercice n°1 :

Soit un cube ABCDEFGH et un plan (IJK) tel que :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$$

Déterminer l'intersection du plan (IJK) avec le cube ABCDEFGH.



Exercice n°2 :

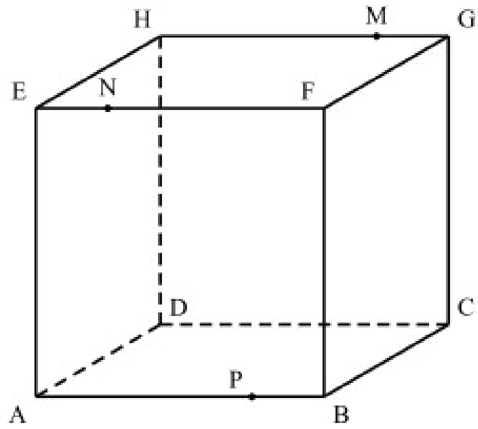
ABCDEFGH est un cube d'arête 8 cm. M, N et P sont les points respectivement des arêtes [GH], [EF] et [AB] tels que : EN = MG = PB = 2 cm

1) a) Construire les points Q et R, intersections du plan (MNP) avec les arêtes [BC] et [CG]

   b) Vérifier que la section du cube par le plan (MNP) est un pentagone

2) a) Calculer la longueur des côtés du pentagone

   b) Dessiner ce pentagone en vraie grandeur.

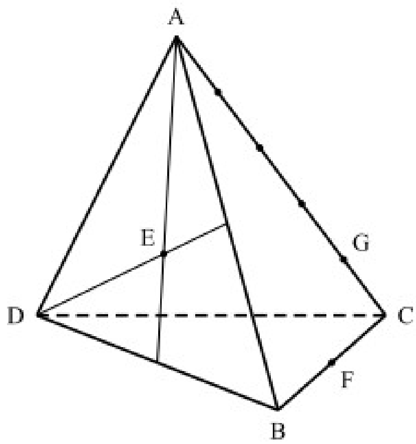


Exercice n°3 :

Soit un tétraèdre ABCD et un plan (EFG) tel que :

- E est le centre de gravité du triangle ABD,
- $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$

Déterminer l'intersection d'un plan (EFG) avec le tétraèdre ABCD.

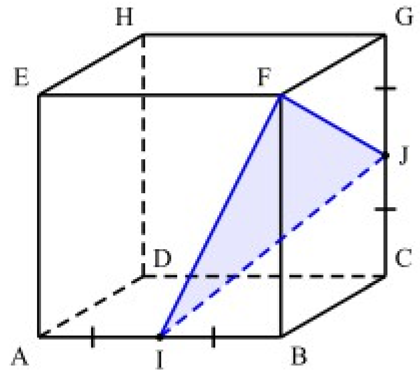


Exercice n°4 :

QCM

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Identifier cette réponse et justifier votre choix.

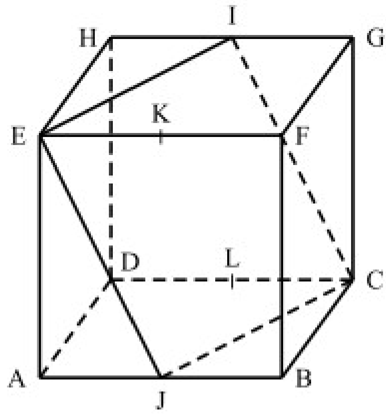
ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CG].



1) Le triangle IFJ est :
   a) isocèle
   b) équilatéral
   c) rectangle isocèle
2) La section du cube par le plan (IFJ) est :
   a) un parallélogramme
   b) un trapèze
   c) un quadrilatère quelconque
3) Le plan (IFJ) coupe la droite (BC) en K.
   a) C est le milieu de [BK]
   b) 2BK = 3BC
   c) BK = 3 BC
4) Le plan (IFJ) coupe le segment [DC] en L.
   a) 5CL = CD
   b) 6CL = CD
   c) 4DL = 3DC

Exercice n°5 :

On considère le cube ABCDEFGH ci contre de côté 4 cm. I, J, K et L sont les milieux respectifs de [GH], [AB], [EF] et [CD].



1) Le point F appartient-il au segment [IC] ?
2) Justifier que EG = GB = BD = DE.
   Peut-on en déduire que EGBD est un losange ?
3) Démontrer que le quadrilatères EIGK, GKJC et EICJ sont des parallélogrammes.
4) Démontrer que EICJ est un losange.
5) Le quadrilatère EICJ est-il un carré ?

Exercice n°6 :

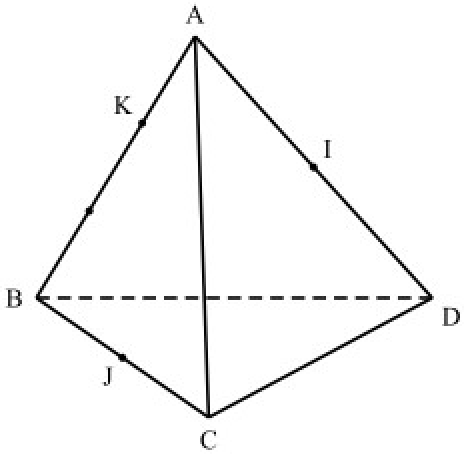
ABCD est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs de [AD] et [BC]. K est le point de l'arête [AB] tel que $3AK = AB$.

1) a) Construire le point M intersection de la droite (IK) et du plan (BCD).

b) Démontrer que D est le milieu de [BM]. On appelera E le milieu de [BK] et on tracera [ED]

2) a) En déduire la construction du point L intersection de [CD] et du plan (IJK).

b) Déterminer la valeur de k pour laquelle $CL = k\,CD$



Exercice n°7 : (géométrie vectorielle)

A, B, C sont trois points non alignés de l'espace. I est le milieu de [BC]. Le point G est tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

b) En déduire que les points G, A et I sont alignés et que G est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice n°8 : (géométrie vectorielle)

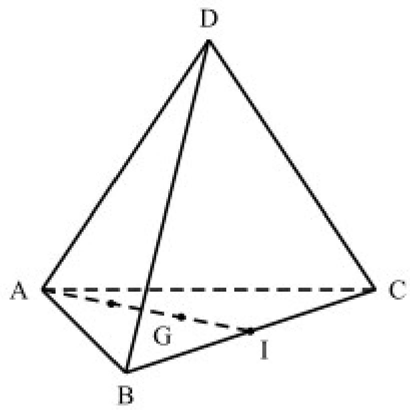
ABCD est un tétraèdre, I est le limieu de [BC]. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC, c'est à dire d'après l'exercice précédent que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
On considère le point K tel que :

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$$

1) a) Démontrer que : $3\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$

b) En déduire que les points K, G et D sont alignés.

2) Trouver le réel k tel que : $\overrightarrow{DK} = k\overrightarrow{DG}$ puis placer K sur la figure.



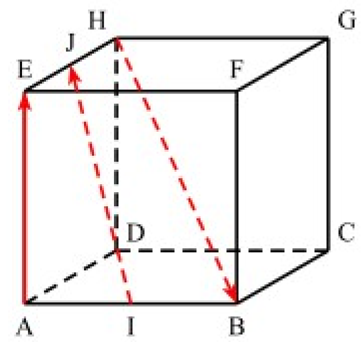
Exercice n°9 : (géométrie vectorielle)

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB] et J celui de [EH].

a) Démontrer que : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

b) En déduire que : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{HB}$

c) Pourquoi peut-on en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires ?

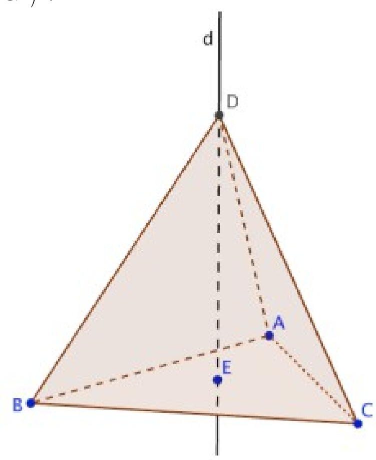


Exercice n°10 : Démontrer que deux droites sont orthogonales.

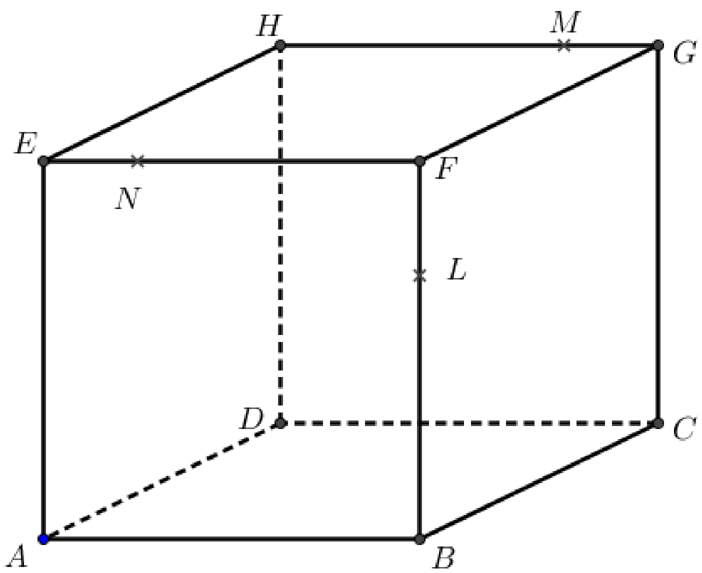
- ABC est un triangle isocèle en B.
- E est le centre de gravité du triangle ABC.
- (d) est la droite orthogonale au plan (ABC) passant par E.
- La pyramide $ABCD$ est telle que le point D soit sur la droite (d).

1) Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

2) Qu'en serait-il avec une base de la pyramide équilatérale ?



Exercice n°11 : Déterminer la section du plan (LMN) avec le cube.

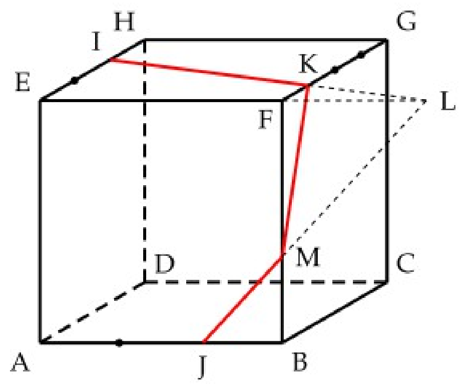


Exercice n°1 :

- Lorsqu'elle existe, l'intersection d'une face par le plan (IJK) est un segment.
- Une droite doit être tracée dans un plan contenant la face du cube.
- Si deux points M et N du plan (IJK) sont sur une face, on relie M et N : cela donne l'intersection du plan (IJK) avec cette face.
- La section du cube par le plan (IJK) est alors un polygone.

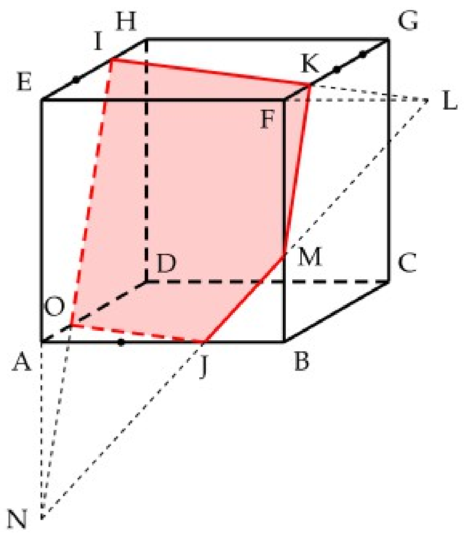
Dans notre construction :

- On trace [IK] en rouge qui est l'intersection du plan (IJK) avec la face du haut EFGH.
- On ne peut pas relier J à I ou K car ces segments ne sont pas sur une face du cube.
- On cherche l'intersection de (IJK) avec la face avant ABFE. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite (IK) avec la droite (EF) qui contient l'arête [EF] appartenant aux faces EFGH et ABFE. On note L leur point d'intersection. Comme L $\in$ (IK) donc $L \in$ (IJK).
- Comme L $\in$ (EF), donc L appartient au plan (EFB) contenant la face ABFE. On trace alors la droite (JL) dans le plan (EFB) qui coupe [FB] en M. Comme M $\in$ (JL), M $\in$ (IJK).
- Ainsi [JM] et [KM] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces avant ABFE et de droite BCGF. On trace ces segments en rouge



On réitère cette opération pour la face gauche ADHE et la face du dessous ABCD :

- On détermine l'intersection de la droite (MJ) avec la droite (AE) qui contient l'arête [AE] appartenant aux faces ADHE et ABFE. On note N leur point d'intersection. Comme N $\in$ (MJ) donc N $\in$ (IJK).
- Comme N $\in$ (AE), donc N appartient au plan (EAD) contenant la face ADHE. On trace alors la droite (NI) dans le plan (EAD) qui coupe [AD] en O. Comme O $\in$ (NI), O $\in$ (IJK).
- Ainsi [OI] et [OJ] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces de gauche ADHE et de dessous ABCD. On trace ces segments en rouge et en pointillé car ces segments sont sur des faces cachées.
- La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est le pentagone IKMJO.



Remarque :

Le plan (IJK) coupe les faces parallèles du dessus et du dessous en des segments parallèles. De même pour les faces de droite et de gauche.

On a donc (IK) // (OJ) et (KM) // (IO)

Exercice n°2 : ABCDEFGH est un cube d'arêtes de longueur 8 cm, avec BP = EN = GM = 2 cm.

1) a) Construction :

On commence par tracer les segments [MN] et [NP], qui sont les intersections du plan (MNP) avec la face de dessus et la face avant du cube.

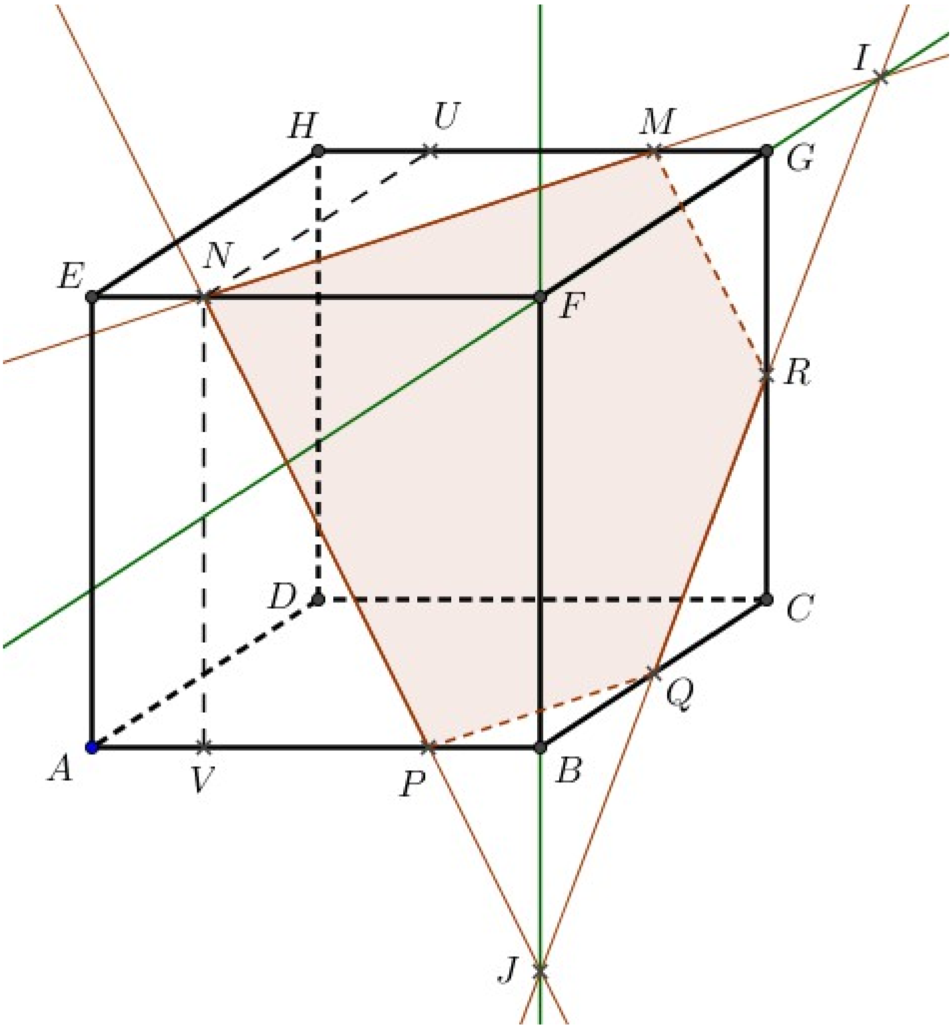
Les droites (MN) et (FG) sont dans le même plan et se coupent donc en un point I.
Ce point appartient au plan (MNP) et à la face droite du cube.

Les droites (NP) et (FB) sont dans le même plan et se coupent donc en un point J.
Ce point appartient également au plan (MNP) et à la face droite du cube.

Donc la droite (IJ) est dans le plan (MNP) et aussi dans le plan (BCG).
Cette droite coupe les arêtes [BC] et [CG] du cube respectivement en Q et R.

La section du plan (MNP) avec la face droite du cube est donc le segment [QR].

b) On obtient cinq points d'intersection avec les arêtes du cube,
donc la section est un pentagone.



2) a) Calcul des dimensions du pentagone :

Dans le triangle MUN rectangle en U, la propriété de Pythagore donne :

$$MN^2 = NP^2 = 8^2 + 4^2 \text{ donc } MN = 4\sqrt{5}.$$

Comme (MG)//(NF), on peut utiliser la propriété de Thalès dans le triangle IFN, qui s'écrit :

$$\frac{IF}{IG} = \frac{FN}{GM} = \frac{6}{2} = 3 \text{ donc } IF = 3\,IG.$$

Par symétrie, sur la face avant on obtiendra $PN = MN = 4\sqrt{5}$ et $JF = 3\,JB$.

Puisque (GR)//(FJ), en utilisant encore Thalès dans le triangle IFJ on obtient :

$$\frac{IF}{IG} = 3 = \frac{FJ}{GR} \text{ donc } JF = 3\,GR = 3\,JB \text{ et donc } GR = JB.$$

De $JF = 3\,JB$ et $GR = JB$ on peut en déduire que R est le milieu de [GC].

Par symétrie, on aura également Q milieu de [BC].

En utilisant Pythagore dans les triangles rectangles MGR et RCQ on obtiendra alors :

$$MR = 2\sqrt{5} \text{ et } QR = 4\sqrt{2}.$$

Finalement : $NM = NP = 4\sqrt{5}$, $MR = PQ = 2\sqrt{5}$ et $QR = 4\sqrt{2}$.

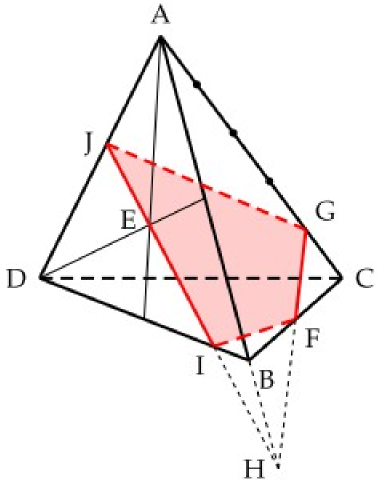
b) Tracé de la section à la règle et au compas.

On devrait obtenir un beau rubis bien taillé, donc symétrique...

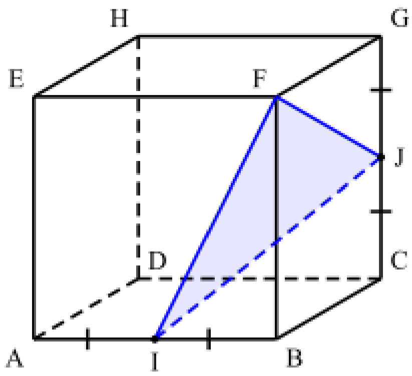
Exercice n°3 :

Dans notre construction :

- E est l'intersection des médianes du triangle ABD.
- On trace [GF] en rouge qui est l'intersection du plan (EFG) avec la face ABC.
- On ne peut pas relier E à F ou G car ces segments ne sont pas sur une face du tétraèdre.
- On cherche l'intersection de (EFG) avec la face ABD. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite (GF) avec la droite (AB) qui contient l'arête [AB] appartenant aux faces ABC et ABD. On note H leur point d'intersection. Comme $H \in (GF)$ donc $H \in (EFG)$.
- Comme $H \in (AB)$, donc H appartient au plan (ABD) contenant la face ABD. On trace alors la droite (HE) qui coupe [BD] en I et [AD] en J. Comme $I \in (HE)$ et $J \in (HE)$ alors $I \in (EFG)$ et $J \in (EFG)$.
- Ainsi [IJ], [FI] et [JG] constituent les intersections du plan (EFG) avec les faces ABD, BCD et ADC. On trace ces segments en rouge et [FI] et [JG] en pointillé car sur des faces cachées.
- La section du tétrèdre ABCD par le plan (EFG) est le quadrilatère GFIJ.



Exercice n°4 :



1) a) FI = FJ à montrer ou à expliquer simplement, donc IFJ est isocèle en F.

b) IJ > IC à expliquer simplement, mais IC = FI à expliquer aussi, donc IFJ n'est pas équilatéral.

c) Démontrons que le triangle IFJ n'est pas rectangle en F par l'absurde.

Supposons donc IFJ rectangle en F.

Alors $IJ^2=FI^2+FJ^2=2FI^2=2FB^2+2BI^2$ d'après Pythagore.

Mais $IJ^2=IC^2+CJ^2=IB^2+BC^2+CJ^2=BI^2+FB^2+BI^2$, dans le triangle rectangle ICJ.

Ce qui donne finalement $FB^2=0$, qui est absurde.

2)

- La section n'est pas un parallélogramme, car JL est évidemment plus petit que FI.

- Les faces avant et arrière du cube étant parallèles, leurs sections par le plan (IFJ) sont deux droites parallèles. Alors les arêtes [FI] et [JL] sont parallèles, donc la section est un trapèze.

3) Dans le triangle KBF, les segments [JC] et [FB] sont parallèles, donc les triangles KBF et KCJ ont des dimensions proportionnelles d'après la propriété de Thalès.

Alors $\frac{KB}{KC}=\frac{FB}{JC}=2$ donc C est le milieu de [KB].

4) Comme le point K appartient au plan (IFJ) et à la face de dessous, tout comme le point I, alors la droite (IK) est l'intersection du plan (IFJ) avec la face du dessous. Elle coupe [CD] en L.

D'après Thalès, $CL=\frac{1}{2}BI=\frac{1}{4}CD$ soit $4CL=CD$, ce qui donne $\frac{DL}{3}=\frac{DC}{4}$, ou $4DL=3DC$.

Exercice n°5 :

1) La perspective est trompeuse car le point F n'appartient pas au segment [IC] puisque F n'est pas sur la face arrière du cube.

2) EG = GB = BD = DE = diagonale d'une face.
Mais EGBD n'est pas un losange car ces quatre points ne sont pas coplanaires : le point D n'appartient pas au plan (EGB).

3) Comme I = milieu de [GH] et K = milieu de [EF] alors :
IG = EK et (IG) // (EK) donc EIGK parallélogramme (1)
De même, KJ = FB = GC et (KJ) // (FB) // (GC), donc GKJC parallélogramme (2)
De (1) et (2) on déduit que EICJ est un parallélogramme.

4) Les triangles rectangles EHI et EAJ sont identiques, donc EI = EJ, ce qui prouve que le parallélogramme EICJ est un losange (On en déduit que (EC) est perpendiculaire à (IJ)).

5) Là encore, la perspective est trompeuse, car les droites (EI) et (EJ) ne sont pas perpendiculaires.
Montrons cela par l'absurde.
Supposons donc que (EI) et (EJ) soient perpendiculaires.

(EH) étant orthogonale au plan (AEF), elle est perpendiculaire à toutes droites de ce plan passant par E, donc à (EJ).

Comme (EJ) est perpendiculaire à (EI), alors (EJ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (HEF), donc (EJ) est orthogonale au plan (HEF).

La droite (EJ) est donc perpendiculaire à toutes droites de ce plan passant par E, donc à (EF), ce qui est absurde.

Comme les droites (EJ) et (EI) ne sont pas perpendiculaires, ECIJ n'est pas un carré.

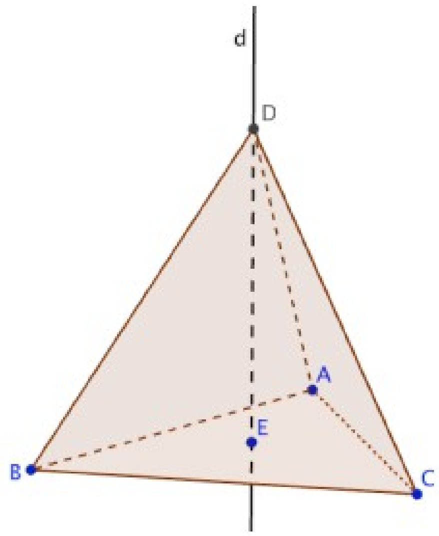
Exercice n°6 :

1) a) Construction :

b) Dans le triangle AED, le segment des milieux [IK] est parallèle au côté [ED].
Alors dans le triangle MBK, La droite (ED) coupe le côté [BM] en son milieu, donc D.

2) a) Il suffit de tracer la droite (MJ), qui coupe l'arête [CD] en L.

Exercice n°10 : Démontrer que deux droites sont orthogonales.



ABC est un triangle isocèle en B, de centre de gravité le point E.
La droite (d) passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide ABCD est telle que D soit sur la droite (d).

Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

La droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

Comme (AC) $\in$ (ABC), alors (AC) est orthogonale à (d).

Par ailleurs, (AC) est perpendiculaire à (BE).
En effet, puisque le triangle ABC est isocèle en B, sa médiane issue de B est confondue avec sa hauteur.

Ainsi (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDE),
donc elle est orthogonale au plan, et à toutes les droites qu'il contient, donc à (BD).