Exercices sur la fonction exponentielle

Opération sur la fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les écritures suivantes :

a) $(e^x)^3 e^{-2x}$ b) $\dfrac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$ c) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$ d) $e^{-x}e^2$

e) $\dfrac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 \times e^x}$ f) $\dfrac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

Exercice 2

Pour tout x, on pose : $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

a) Démontrer que $[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = 1$

b) Démontrer que $g(2x) = 2[g(x)]^2 - 1$ et que $h(2x) = 2g(x) \times h(x)$.

c) Comparer ces relations avec les fonctions sinus et cosinus.

Équations et inéquations

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{3-x} = 1$ 2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ 3) $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + 2}$ 4) $e^{x^3} = e^8$

5) $e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$ 6) $e^{\sin x} = e^{\frac{1}{2}}$ 7) $e^{x^2} = (e^2)^3 e^{-x}$ 8) $e^{x^2} = e^{x-2}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{x^2} \leqslant \dfrac{1}{e^2}$ 2) $(e^x)^3 \leqslant e^{x+6}$ 3) $e^x \leqslant \dfrac{1}{e^x}$

4) $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$ 5) $e^{2x} < e^x$ 6) $3(e^x)^2 + e^x - 4 < 0$

Dérivées

Exercice 5

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x}e^x$ 3) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$ 5) $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^x$

Calcul de limites

Exercice 6

Déterminer les limites des fonction f suivantes à l'endroit indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$
2) $f(x) = 2xe^{-x}$ en $+\infty$
3) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ en $+\infty$ et $-\infty$
4) $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$ en $+\infty$ et $-\infty$
5) $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ en $+\infty$ et $-\infty$
6) $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^{2x} - 1)$ en 0 et $+\infty$
7) $f(x) = x + 2 + xe^x$ en $-\infty$

Étude d'une fonction

Exercice 7

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

1) Pourquoi les droite d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

Exercice 8

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3 - x)e^x$. Justifier les affirmations suivantes :

1) Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	e^2	↘ $-\infty$

2) Pour tout réel $m > 0$ et $m \neq e^2$, l'équation $f(x) = m$ admet soit aucune, soit deux solutions.

Exercice 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1) Calculer $f(-x)$. Que peut-on conclure pour $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Calculer la dérivée de f puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $x \in [-2\ ;\ 2\ ]$ dans un repère orthonormal.
   Unité graphique : 2 cm sur les deux axes.

Fonction e^u

Exercice 10

Déterminer les fonctions dérivées suivantes :

1) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
2) $f(x) = 2(x-1)e^{x-1}$
3) $f(x) = \cos x e^{\sin x}$
4) $f(x) = e^{\frac{1+x}{1+x^2}}$

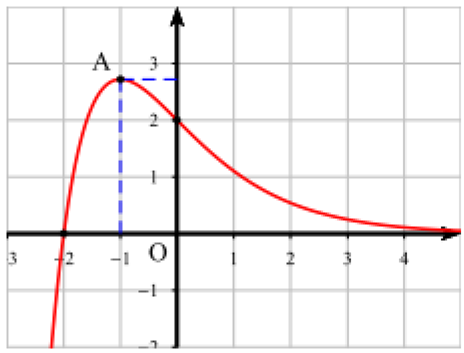
Exercice 11

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels.

1) À l'aide des renseignements portés sur la figure, déterminer a et b.
2) Calculer $f'(x)$. En déduire les coordonnées du point A maximum de f

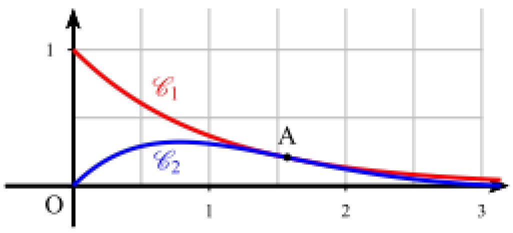


Exercice 12

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-contre les courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentant les fonctions f_1 et f_2 définies sur $[0;\pi]$ par :

$$f_1(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin x\, e^{-x}$$

Démontrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes en un point A.



Application en astronomie

Exercice 13

L'intensité $I(\lambda)$ du rayonnement d'une étoile pour une longueur d'onde λ ($\lambda > 0$), est donnée par : $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5}\, e^{-\frac{K}{\lambda}}$ où K est une constante positive qui dépend de l'étoile.

Démontrer que l'intensité $I(\lambda)$ rayonnée par l'étoile est maximale pour une valeur λ_0 de λ que l'on déterminera en fonction de K. En déduire $I(\lambda_0)$.

Exercices de BAC

Exercice 14

Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I = [0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{10x}{e^x+1}$

1) Démontrer que pour tout réel x de I, on a : $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2}\, g(x)$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.

2) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$. Donner de α un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

3) En déduire le tableau de variation de f et démontrer que $f(\alpha) = 10(\alpha - 1)$.

4) Construire la courbe $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal pour $x \in [0; 8]$.
Unité graphique 1 cm.

Exercice 15

Amérique du sud novembre 2013

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.

2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

4) Déterminer la dérivée de la fonction f.

5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1) Vérifier que, pour tout réel x : $(1 - x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

2) Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.
En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$.

3) Soit $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. Vérifier cette limite par un algorithme.