Exercices sur la fonction logarithme.

Exercice n°1 :

Simplifier les écritures suivantes :

1) $A = e^{\ln 3}$; $B = \dfrac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}$; $C = \dfrac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$

2) $f(x) = e^{\ln(x-1)+\ln x}$; $g(x) = \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{-\ln x}$

Exercice n°2 :

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $\ln(x^2)$ 2) $\ln(1-x)$ 3) $\ln(x-3)$ 4) $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$ 5) $\dfrac{1}{\ln x}$

6) $\ln(x^2+4x)$ 7) $\ln|x^2-3x+2|$ 8) $\ln|x+1| - \ln|x-1|$

9) $\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$ 10) $\ln(e^x-1)$ 11) $e^x + \ln|x|$ 12) $\ln e^x - e^{\ln(x+1)}$ 13) $e^{\ln(x^2-1)}$

Exercice n°3 :

Résoudre les équations suivantes en précisant auparavant leur ensemble de validité :

1) $\ln(2-2x) = 1$

2) $\ln(2-x) = -3$

3) $\ln(x^2-8) = 0$

4) $\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 2$

5) $e^{x+2} = 3$

6) $e^{\frac{x}{x+1}} = 2$

7) $(e^x+1)(e^x-4) = 0$

8) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

9) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

10) $\ln(x-2) = \ln 2$

11) $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

Exercice n°4 :

Résoudre les inéquations suivantes en précisant auparavant leur ensemble de validité :

1) $\ln x < 1$

2) $\ln x \geqslant 2$

3) $-1 \leqslant \ln x \leqslant 2$

4) $\ln(2x-1) > -1$

5) $e^{x-1} < 2$

6) $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$

7) $\dfrac{1}{2} \leqslant e^x \leqslant 2$

8) $(e^x+1)(e^x-4) \leqslant 0$

9) $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$

10) $\ln(-3x) \geqslant \ln(x^2-4)$

11) $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \geqslant \ln x$

12) $\ln x \leqslant \ln(x^2-2x)$

Exercice n°5 :

1) Simplifier : $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$; $b = \ln \frac{1}{16}$; $c = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$

2) Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$

$a = \ln 50$; $b = \ln \frac{16}{25}$; $c = \ln 250$

3) Démontrer que : $\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = 0$

4) Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue n entier naturel

a) $2^n \leqslant 100$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-2}$ c) $0,2 \geqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$ d) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geqslant 2$

Exercice n°6 :

Simplifier au maximum chacun des nombres suivants :

1) $A = \ln e^3 - \ln e^2$

2) $B = \ln e\sqrt{e}$

3) $C = \ln 2 + \ln(16e) - \ln(4e^2)$

4) $D = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\ln \frac{1}{e}\right)^2$

5) $E = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln \frac{1}{4}$

Exercice n°7 :

Résoudre les équations suivantes en précisant auparavant leur ensemble de validité :

1) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln 2x$

2) $e^{3x} = 4e^x$

3) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

4) $e^{-2x} - 5e^{-x} + 6 = 0$

5) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \end{cases}$

Exercice n°8 :

Résoudre les inéquations suivantes en précisant auparavant leur ensemble de validité :

1) $\ln(5 - x) - \ln 3 + \ln(x - 1) \geqslant 0$

2) $e^{2x} < 2e^x$ 3) $e^{x+2} \geqslant \frac{3}{e^x}$

4) $\ln^2 x - 2\ln x - 3 \geqslant 0$

5) $3e^{2x} - 7e^x + 2 < 0$

Exercice n°9 :

Pour tout réel x, on pose : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1) a) Vérifier que $P(-1) = 0$

b) En déduire une factorisation de $P(x)$

c) Résoudre alors l'inéquation : $P(x) \leqslant 0$

2) Utiliser les résultats précédents pour résoudre l'inéquation :

$$2\ln x + \ln(2x + 5) \leqslant \ln(2 - x)$$

Exercice n°10 :

On considère l'équation (E_1) : $e^x - x^n = 0$

1) Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \frac{x}{n} = 0$
2) Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Exercice n°11 :

Déterminer les limites au point considéré :

1) $f(x) = x - \ln x$ en $+\infty$
2) $f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$
3) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ en 0
4) $f(x) = x + x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
5) $f(x) = \ln(e^x + 2)$ en $-\infty$ et $+\infty$
6) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2e^x + 3}\right)$ en $-\infty$ et $+\infty$

Exercice n°12 :

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en ayant donné auparavant leur ensemble de dérivation :

1) $f(x) = \ln(1 + x^2)$
2) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
3) $f(x) = \ln(\ln x)$
4) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$
5) $f(x) = e^{-x}\ln x$
6) $f(x) = e^{x\ln x}$
7) $f(x) = \ln(1 + e^x)$
8) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

Exercice n°13 :

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

   b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2) a) On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
   Trouver une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A.

   b) Construire T, puis $\mathscr{C}_f$. On prendra comme unité 2cm sur les abscisses et 5 cm sur les ordonnées.

3) M est un point de $\mathscr{C}_f$.
Démontrer que la tangente T_u à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si, et seulement si :

$$u^3 - 1 + 2\ln u = 0 \quad \text{(E)}$$

4) À partir de l'équation (E), démontrer que A est le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice n°14 :

(u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$

On note (v_n) la suite définie pour tout n par : $v_n = \ln u_n - 2$

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser v_0 et sa raison r.
2) En déduire v_n, puis $\ln u_n$, en fonction de n.
3) a) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?
   b) En déduire que la suite (u_n) converge vers e^2.

Exercice n°15 :

A : Étude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$

1) Démontrer que sur l'intervalle $[1;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et donner pour α un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

B : Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Quelle est la limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ quand x tend vers 0 ?
   b) En déduire que f est dérivable en $x = 0$ et trouver une équation de la tangente T en $x = 0$ à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2) a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
   b) En déduire la limite en $+\infty$.
3) a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   b) En déduire les variations de f.
   c) Construire T , puis $\mathscr{C}_f$. On prendra comme unités : 1 cm sur les abscisses et 4 cm sur les ordonnées.

Exercice n°16 :

Réaction acide/base

Lors d'une réaction acide/base, le pH de la solution est donné par :

$$pH = pK_A + \log \frac{[Base]}{[Acide]}$$

où $pK_A = -\log K_A$, avec $K_A = \dfrac{[Base][H_3O^+]}{[Acide]}$, appelé constante d'équilibre.

On considère une solution contenant divers couples acide/base, dont le couple NH_4^+/NH_3 avec : $K_A = 6,3 \times 10^{-10}$

On suppose que, dans cette solution, l'ammoniac est l'espèce prédominante du couple : il y a vingt fois plus de molécules d'ammoniac que d'ion hydronium (NH_4^+).
Déterminer le pH de la solution considérée

Exercice n°17 :

Magnitude des étoiles

Partie A

La loi des magnitudes permet de classer les les étoiles selon leur éclat. La sensibilité de l'œil à la lumière étant logarithmique, on a :

$$m - m' = 2,5 \log \frac{E'}{E}$$

où E est l'éclat d'une étoile de magnitude apparente m et E' celui d'une étoile de magnitude apparente m' .
car la sensibilité de l'œil à la lumière est logarithmique.

1) Soit A et B deux étoiles d'éclats respectifs E_A et E_B.
   Comparer leurs magnitudes apparentes sachant que $E_A > E_B$.
2) L'Étoile polaire a une magnitude de 2,15 Soleil de $-26,84$.
   Évaluer le rapport $\dfrac{E_S}{E_P}$, où E_S est l'éclat du Soleil et E_P celui de l'Étoile polaire.

Partie B

La magnitude absolue M d'une étoile est la magnitude qu'elle aurait si elle était située à 10 parsecs de la Soleil (1 parsec = $3,26$ années-lumière = $3,08 \times 10^{16}$ m).
On démontre que l'on a $m = M - 5 + 5\log d$, où d est la distance Terre-étoile en parsecs.

1) Calculer la magnitude absolue du Soleil, sachant que la distance Terre-Soleil est de 149 millions de kilomètres.
2) L'étoile Sirius a une magnitude apparente $-1,45$ et une magnitude absolue de $1,42$.
   Déterminer la distance qui sépare cette étoile de la Terre.

Exercice n°18 : Fonction de retouche.

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes. Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

- Si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
- Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1) On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$

   a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
   Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2) On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x]$

   On admet que f_2 est une fonction de retouche.
   On définit sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}$;

b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

c) Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1) Dans l'algorithme décrit ci-contre, f désigne une fonction de retouche.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

2) Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Variables : x (nuance initiale)
y (nuance retouchée)
E (écart)
c, k (compteurs)
Entrées et initialisation
c prend la valeur 0
Traitement
pour k allant de 0 à 100 **faire**
x prend la valeur $\dfrac{k}{100}$
y prend la valeur $f(x)$
E prend la valeur $|y-x|$
si $E \geqslant 0,05$ **alors**
c prend la valeur $c+1$
fin
fin
Sorties : Afficher c