Fiche d'exercices sur la démonstration par récurrence.

Exercice n°1 :

Démontrer que : pour tout entier naturel n , $10^n - 1$ est un multiple de 9 .

Exercice n°2 :

Démontrer que : pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3 .

Exercice n°3 :

Démontrer que : pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8 .

Exercice n°4 :

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 .

Exercice n°5 :

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^n - 1$ est pair.

Exercice n°6 :

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7 .

Exercice n°7 :

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 2$ est un nombre pair.

Exercice n°8 :

Est-il vrai que : $\forall n \geqslant 1$, $n^3 + 2n$ est un multiple de 3 .

Exercice n°9 :

Un élève affirme avoir démontré que $4^n + 1$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n .

1) Montrer que cette propriété est héréditaire.

2) Cette propriété est-elle vraie ? Conclure.

Exercice n°10 : Somme des $(n+1)$ premiers nombres impairs.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = 1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$.

Exercice n°11 :

Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1 \text{ , la somme } S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} .$$

Exercice n°12 : Soit n un entier non nul.

On appelle « factorielle n » le nombre entier noté $n!$ défini par : $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$.

Est-il nécessaire d'utiliser la démonstration par récurrence pour établir le résultat suivant : $\forall n \geqslant 1 ,\ n! \geqslant 2^{n-1}$.

Exercice n°13 : Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs non nuls est divisible par six.

Exercice n°14 :

Soit n un entier non nul. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ la somme des n premiers carrés.

1) Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .

2) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

3) Démontrer que : $\forall n \geqslant 1 ,\ S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice n°15 :

Soit n un entier non nul. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ la somme des n premiers cubes.

1) Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .

2) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

3) Démontrer que : $\forall n \geqslant 1 ,\ S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.