- Suites arithmético-géométriques -

Ce sont les suites (u_n) définies par un premier terme et une relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction affine.
On a donc une relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=au_n+b$.

<u>Premier exemple</u> : (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+10}{3} \end{cases}$.

1) Sur un graphique, placer les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses. Quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de la suite (u_n) ?

2) Démontrer que la suite (u_n) converge.

3) Déterminer alors sa limite en justifiant votre démarche.

4) Que se serait-il passé en choisissant $u_0=10$?

<u>Deuxième exemple</u> : (v_n) est définie par : $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=-2v_n+5 \end{cases}$.

1) Sur un graphique, placer les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses. Quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de la suite (v_n) ?

2) On pose $w_n=v_n-\dfrac{5}{3}$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

4) Déterminer alors la limite éventuelle de la suite (v_n).

Cas général :

(u_n) est définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence suivante : pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = a u_n + b$.

On suppose que $a \neq 0$ et u_0 strictement positif.

1) Déterminer l'abscisse du point fixe de la fonction affine $f(x) = ax + b$.
   On notera x_0 cet abscisse.

2) On pose alors $v_n = u_n - x_0$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3) Exprimant alors u_n en fonction de n.

4) Déterminer suivant les valeurs de a la limite de la suite (u_n).

5) Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n et étudier la limite de (S_n).