- Problèmes de géométrie dans l'espace -

Exercice n°1 :

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+\ t \\ y & = & 6+2t \\ z & = & 4-\ t \end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 8+5t' \\ y & = & 2-2t' \\ z & = & 6+\ t' \end{array}\right., \quad t'\in\mathbb{R}.$$

Affirmation : les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(12\ ;\ 7\ ;\ -13)$ et $B(3\ ;\ 1\ ;\ 2)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y-5z=1$.

Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice n°2 :

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère :

— les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} : x-y-z-2=0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}' : x+y+3z=0.$$

— la droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 2
La sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathscr{P}$.

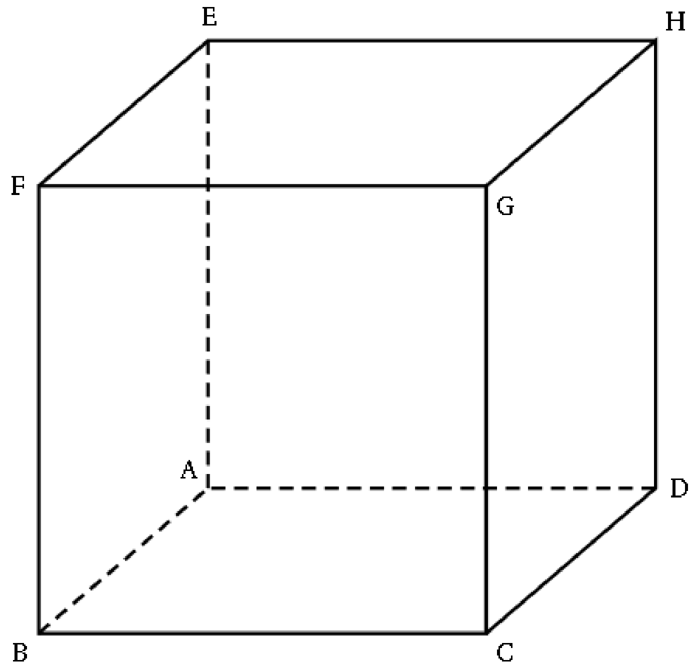
Proposition 3
L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-\ t' \\ y & = & -1-2t' \\ z & = & t' \end{array}\right. \quad t'\in\mathbb{R}.$$

Proposition 4
Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires.

Exercice n°3 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère les points $\mathrm{I}\left(1\,;\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, $\mathrm{K}\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $\mathrm{L}(a\,;\,1\,;\,0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right., \quad t' \in \mathbb{R}$$

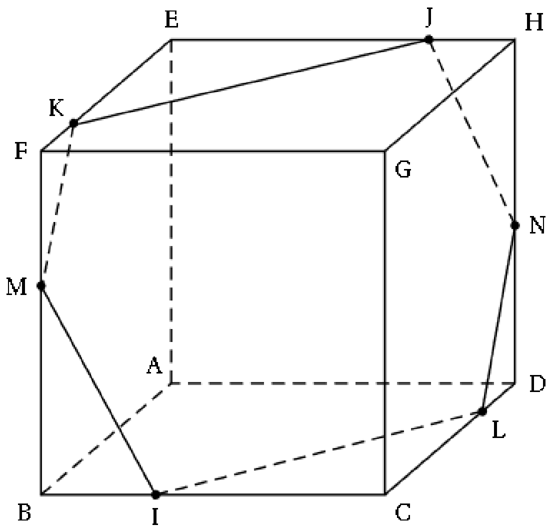
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(8;9;5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x+9y+5z-11=0$.

c. En déduire les coordonnées des points M et N

Exercice n°4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z-1=0$ et soit S le point de coordonnées $(1 ; 3 ; 5)$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie. ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Les points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.
2. La droite δ_1 de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+\ t \\ y & = & 5-4t \\ z & = & 2-2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$$

   est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
3. La droite δ_2 de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t \\ y & = & 7+4t \\ z & = & 7+2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$$

   est la droite parallèle à la droite δ_1 passant par le point S.
4. Le projeté orthogonal du point S sur le plan $\mathscr{P}$ a pour coordonnées

$$\left(-\frac{6}{7} ; \frac{55}{14} ; \frac{31}{14}\right).$$

5. Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère de centre S et de rayon 3.

Exercice n°5 :

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.
On note $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & -t \\ z & = & 2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Soit $\mathscr{P}$ le plan défini par l'équation $x + y + 2z - 1 = 0$.
Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $B(1\,;\,-1\,;\,0)$ et de rayon 1.
Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix.
Il est attribué pour chaque question 0,5 *point si la réponse est exacte et* 0,5 *point si la justification est correcte.*

1. La droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont :

a. parallèles ;

b. perpendiculaires ;

c. non parallèles et non perpendiculaires.

2. Soit $\mathscr{P}'$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}$ et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}'$ admet pour équation cartésienne :

a. $-2y + z + 2 = 0$;

b. $2x - z = 0$;

c. $x - y - z = 0$.

3. La droite Δ, intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan d'équation $2x - z = 0$, admet pour représentation paramétrique :

a. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & -3t+1 \\ z & = & 2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$;

b. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & -t \\ z & = & 2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$;

c. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & -5t+1 \\ z & = & 2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$.

4. L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est :

a. un point ;

b. l'ensemble vide ;

c. un cercle.

Exercice n°6 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\ ;\ -1\ ;\ 1),\quad B(4\ ;\ -3\ ;\ 0) \text{ et } C(-1\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+8 \end{cases}$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5=0$.
4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.
   Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5=0$.*

Exercice n°7 :

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

, La droite $\mathcal{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = 1+3t \\ z = 4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.
   - **a.** La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
   - **b.** La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
   - **c.** La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
2. On note $\mathcal{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
   - **a.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
   - **b.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.
   - **c.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

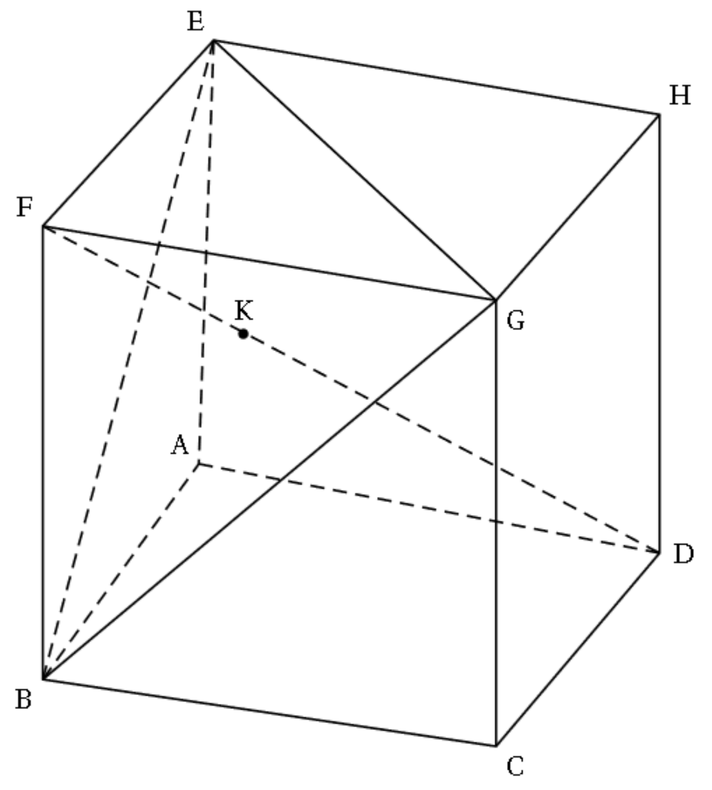
Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$.
   - **a.** $\mathcal{E}$ est l'axe des abscisses.
   - **b.** $\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées.
   - **c.** $\mathcal{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.
4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   - **a.** Le triangle OBC est isocèle en O.
   - **b.** Les points O, B, C sont alignés.
   - **c.** Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.*

Exercice n°8 :

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).
3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $K\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.
4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.

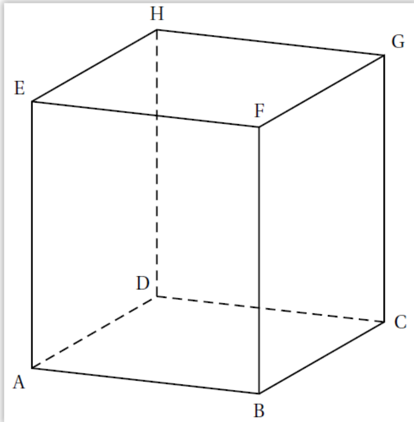


5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD. *

Exercice n°9 : Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points $M\left(1;1;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ et $P\left(1;0;-\frac{5}{4}\right)$.

1) Placer les points sur la figure suivante.



2) Les points M, N et P sont-ils alignés ?

3) On considère l'algorithme1 suivant :

Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

a) Exécuter cet algorithme à la main avec les coordonnées des points précédents.

b) A quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ?
Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4) On considère maintenant l'algorithme2 suivant. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

5) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (MNP), puis donner une équation cartésienne de ce plan.

6) On considère la droite (Δ) passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

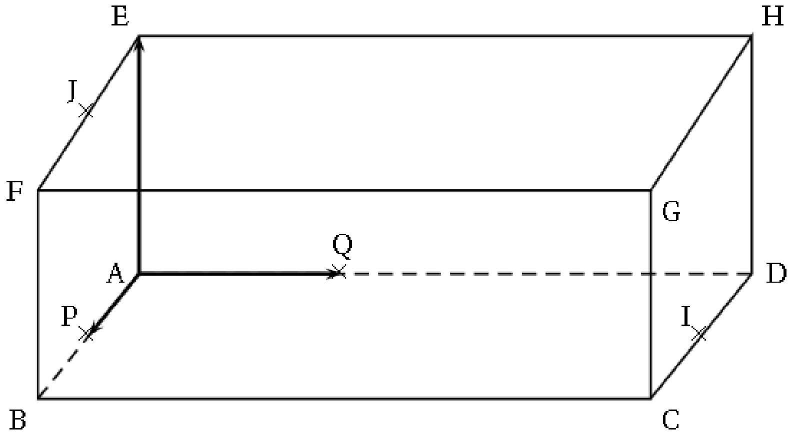
7) Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite (Δ).

Montrer que les coordonnées du point K sont $K\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.

8) On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$. Calculer le volume du tétraèdre $MNPF$.

Exercice n°10 :

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].
3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
   Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].
4. **a.** Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

   b. Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

   $$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

   c. Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.

   d. Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

Exercice n°11 :

Centre étrangers juin 2014

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :
A(1 ; 2 ; 7), B(2 ; 0 ; 2), C(3 ; 1 ; 3), D(3 ; −6 ; 1) et E(4 ; −8 ; −4)

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Soit $\overrightarrow{u}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

   a) Déterminer les valeurs de b et c telles que $\overrightarrow{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.

   c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3) On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

   a) La droite $\mathscr{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

4) Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Exercice n°12 :

Amérique du Nord juin 2014 - Section d'un cube par un plan

On considère un cube ABCDEFCH donné ci-après.

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1) Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L

2) On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

   a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

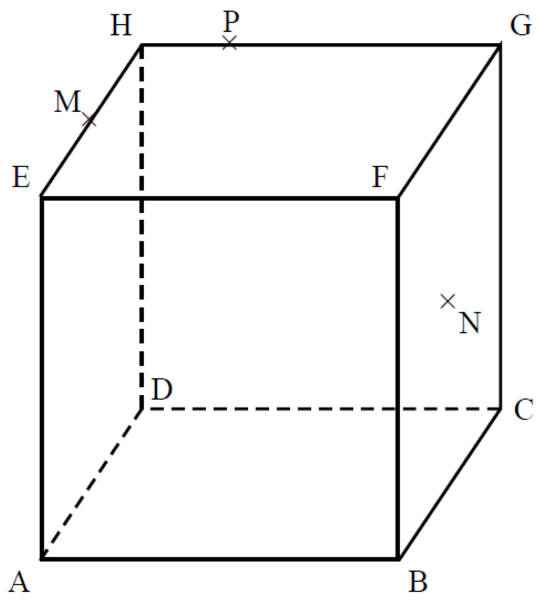
   b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3) En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

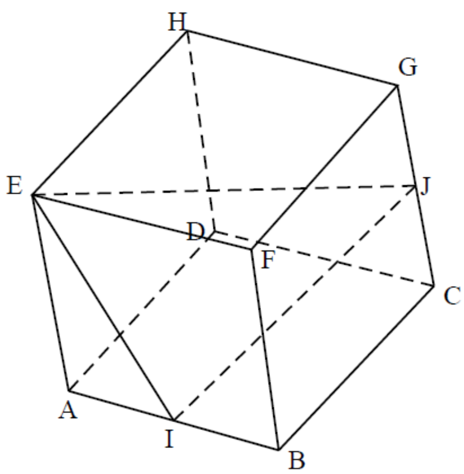
1) Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2) Déterminer les coordonnées du point L.
3) On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?



Exercice n°13:

Amérique du sud nov 2005

On donne le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.



Le candidat est appelé à juger chacune des 10 affirmations suivantes. Répondre par vrai ou faux.

Exercice n°14 :

On donne le point A(-7 ; 0 ; 4) et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + 2y - z - 1 = 0$.

Le but de cette question est de calculer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.

On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
2) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$.
3) Déterminer d

Exercice n°15 :

Polynésie juin 2014

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points
A(5 ; -5 ; 2), B(-1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et D(6 ; 6 ; -1)

1) Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
2) a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(-2;\ 3\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
4) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (BCD).
5) Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B} \times h$, *où* $\mathscr{B}$ *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur correspondante.*
6) On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice n°16 :

Liban juin 2014 - Vrai-Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On donne les points A(1 ; 1; 0), B(3 ; 0 ; -1) et C(7 ; 1 ; -2)

Proposition 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$

Proposition 2 : Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 : Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 : La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées (8; -3; -4).

Proposition 5 : Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.